

大连理工大学  
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# 博士学位论文

DOCTORAL DISSERTATION



## 量子信息远程传输的理论研究

理论物理

学科专业 \_\_\_\_\_

王雅红

作者姓名 \_\_\_\_\_

宋鹤山 教授

指导教师 \_\_\_\_\_

2008年6月

答辩日期 \_\_\_\_\_

# 博士学位论文

## 量子信息远程传输的理论研究

Theoretical Study on Remote Transmission of Quantum  
Information

作者姓名: 王雅红

学科、专业: 理论物理

学 号: 10402018

指导教师: 宋鹤山教授

完成日期: 2008年3月

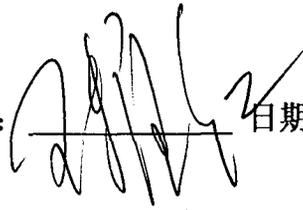
大连理工大学

Dalian University of Technology

## 独创性说明

作者郑重声明：本博士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名：



日期：2008.6.20

## 摘 要

量子信息学是以量子力学为基础的信息理论,是信息理论和量子理论的交叉学科,它为信息科学的发展提供了崭新的原理、方法和途径。量子信息远程传输是量子信息领域研究的主要课题,是实现量子远程通讯和量子计算的必要步骤,在基础理论和实际应用两方面均具有重大意义。

在量子信息传输过程,纠缠态是必不可少的物理资源,如何根据需要制备相应的纠缠态是量子信息学的一个重要课题。量子通讯过程要伴随着一定量经典信息传输,如何在保证信息安全的同时,尽可能减少物理资源的消耗,也是量子信息理论所关注的一个问题。基于以上想法,本文着重对纠缠态的制备、量子隐形传态和量子远程态制备两种量子信息远程传输方式进行研究,主要研究成果如下:

(1) 提出在腔QED中实现 $n$ -体对称 $W$ 态及两种非对称类- $W$ 态制备方案。这两种非对称类- $W$ 态纠缠方式不同,但他们有共同的纠缠特性,利用这种纠缠特性,实现确定的单向受控量子隐形传态。

(2) 借助于腔QED,提出几种未知量子信息远程传输——量子隐形传态方案。无需直接Bell态测量的多原子任意态受控隐形传态方案,用对单原子投影测量来代替在实验上难以实现的直接Bell态测量,并引入十进制数来表示多量子比特量子态,简化了复杂多体问题的数学表达式。利用一个EPR对实现 $n$ -体类-GHZ态的量子隐形传态方案,整个通讯过程只需要一个EPR对和 $3\text{ cbits}$ 的经典信息,大大节省了物理资源,缓解信道压力;利用非对称类- $W$ 态实现确定的单向受控量子隐形传态,在没有噪声的条件下,Alice可以将量子信息准确无误地发送给任一个客户,但每一个客户只能控制配合整个信息的传输过程,客户之间不能实现确定的信息传递,这样便保证了信息的安全性。基于以上方案,总结出基于腔QED理论实现确定隐形传态的纠缠态特点。最后,提出超算符方法处理两个qubit任意态确定隐形传态理论方案。

(3) 提出两种已知量子信息远程传输——量子远程态制备(RSP)方案。一个是, $n$ -qubit“equatorial”态受控RSP方案,用 $(n-1)$ 个EPR对和一个GHZ态作为量子通道来完成 $n$ -qubit“equatorial”态远程态制备,这一过程受到一个监控者控制,需传输 $n+1\text{ cbits}$ 的经典信息;另一个是,单个qubit任意态RSP方案,借助于腔QED理论,在只传输 $1\text{ cbit}$ 的条件下,实现单个qubit任意态远程态制备。该方案又分为两种不同的实现方式,这两种方式的不同点表现为:量子通道中粒子纠缠形式不同,即RSP过程所消耗的量子资源(纠缠)不同。该RSP方案可以推广至多个二能级原子任意态远程态制备。

关键词: 量子隐形传态; 远程态制备; 腔QED; 量子纠缠

# Theoretical Study on Remote Transmission of Quantum Information

## Abstract

Quantum information theory, which provides new principles and methods for information science, is a combination of information theory and quantum mechanics. The remote transmission of quantum information is not only a main subject in the field of quantum information, but also an essential process in quantum remote communication and quantum computation. It is significant for both basic theory and practical application.

There are two important questions in quantum information transmitting. One is how to prepare entangled quantum states since quantum entanglement is an absolutely necessary resource in quantum communication. The other is how to reduce the consumption of both quantum and classical resources in quantum communication. Taking the problems stated above into account, the schemes for preparation of entangled states, quantum teleportation and remote state preparation are mainly discussed in this dissertation. The main results are as follows:

(1) A scheme is proposed for preparation of the symmetrical W state and two kinds of unsymmetrical W-class states via cavity QED system. Although the two kinds of W-class states are different from each other, they have the same character. It is this character that can result in a controlled teleportation which is deterministic and unilateral.

(2) Several schemes are proposed for remote transmission of unknown quantum information -Quantum Teleportation via cavity QED. To begin with, in the scheme for direct Bell-state-measurement (BSM)- free controlled teleportation of unknown atomic states, the Von Neumann measurement on single atom can take the place of direct BSM, which is still a bottle-neck problem for quantum information, with the help of cavity QED. The binary quantum state is rewritten in decimal form and a simple expression is given for complicated multipartite problem. Next, in the scheme for teleportation of an arbitrary multipartite GHZ-class state by one EPR pair, only one EPR pair and 3 classical bits are needed, which greatly lessens the oppressiveness of both quantum and classical channels. Then, in the scheme for deterministic, unilateral and controlled teleportation via cavity QED, Alice can determinately send her state to anyone of her agents, whereas the agents can not, with the channel being noiseless. What the agents can do is just to control the teleporting process, which enhance the security of the communication. Besides, based on the schemes discussed above, it is easy to

see the character of an entangled state which can accomplish deterministic teleportation via cavity QED. What's more, the theoretical scheme is proposed for deterministic teleportation of two qubits arbitrary state via a super-operator.

(3) Two kinds of schemes are given for remote transmission of known quantum information - Remote State Preparation (RSP). The one is the scheme for controlled RSP of  $n$ -qubit equatorial state. In the process, only one GHZ state and  $(n-1)$  EPR pairs are needed with  $(n+1)$  cbits consumed and there is one supervisor to control the quantum communication process. The other is the scheme for RSP of an arbitrary state of one-qubit via cavity QED with only 1cbit consumed. This scheme can be fulfilled in two different ways. The difference between them is that the entangled states in quantum channels are different, that is to say, the number of entangled bits (ebit) needed in the process are not equal. In addition, this scheme can be generalized to RSP of an arbitrary multi-atom state.

**Keywords:** Quantum Teleportation; Remote State Preparation ; Cavity QED ; Quantum Entanglement

## 目 录

摘 要	I
Abstract	III
1 引 言	1
1.1 经典信息科学的发展及其面临的挑战	1
1.2 量子信息学的产生	2
1.3 量子信息学的研究现状	3
1.4 本文的研究内容	4
2 量子信息的基本概念与基本功能	7
2.1 量子比特	7
2.2 量子系统的定态描述	7
2.3 保真度	8
2.4 量子纠缠	9
2.4.1 量子纠缠定义	9
2.4.2 量子纠缠度量	10
2.4.3 量子纠缠变换	11
2.4.4 不可克隆定理	14
2.5 量子通讯	15
2.5.1 量子密码术	15
2.5.2 量子稠密编码	16
2.5.3 量子安全直接通讯	17
2.5.4 量子隐形传态	18
2.5.5 量子态远程态制备	21
2.6 量子计算	22
2.6.1 量子门	22
2.6.2 量子并行计算	27
2.6.3 量子计算机物理实现	29
2.7 小结	30
3 二能级原子与单模腔场相互作用制备纠缠态的基本理论	31
3.1 J-C模型	31
3.2 单原子与共振的单模腔场相互作用制备纠缠态	32

3.2.1	单原子与共振腔场之间纠缠态制备	33
3.2.2	共振作用制备两原子最大纠缠态	33
3.2.3	共振作用制备多原子纠缠态	34
3.3	大失谐作用制备两原子纠缠态	35
3.3.1	不含经典场驱动的失谐作用制备原子纠缠态	36
3.3.2	经典场驱动下的失谐作用制备原子纠缠态	38
3.4	对称W态及非对称类-W态的制备	41
3.4.1	对称W态的制备	42
3.4.2	两种非对称类-W态的制备	44
3.4.3	两种非对称类-W态的纠缠特性	44
3.5	可行性分析	47
3.6	小结	48
4	未知量子信息远程传输——量子隐形传态	49
4.1	无需直接Bell基测量的多原子任意态量子隐形传态	49
4.1.1	两体任意态隐形传态方案	49
4.1.2	多体任意态隐形传态方案	52
4.1.3	小结	54
4.2	利用一个EPR对实现多个量子比特类-GHZ态隐形传态	55
4.2.1	利用一个EPR对实现两个量子比特类-GHZ态隐形传态	55
4.2.2	用一个EPR对实现多个量子比特类-GHZ态隐形传态	57
4.2.3	多个量子比特类-GHZ态受控隐形传态	59
4.2.4	小结	60
4.3	利用类-W态实现确定的单向受控量子隐形传态	61
4.3.1	传统方法利用W态实现量子态概率传态	61
4.3.2	利用三粒子类-W态实现两体量子态确定隐形传态	64
4.3.3	多体类-W态实现确定的多体受控量子隐形传态(一)	67
4.3.4	多体类-W态实现确定的多体受控量子隐形传态(二)	69
4.3.5	多体类-W态实现受控概率传态	72
4.3.6	小结	80
4.4	利用腔QED理论实现确定隐形传态的纠缠态特点	81
4.5	基于腔QED实现确定隐形传态纠缠态的纠缠度	82

4.6	超算符方法处理确定量子隐形传态的理论方案 . . . . .	83
4.6.1	单粒子隐形传态理论方案 . . . . .	83
4.6.2	两体隐形传态理论方案 . . . . .	84
5	已知量子信息远程传输——远程态制备 . . . . .	87
5.1	几种典型的量子态远程态制备方案 . . . . .	87
5.1.1	利用纠缠稀释与提纯实现远程态制备方案 . . . . .	87
5.1.2	消耗最少经典信息的单粒子态远程态制备方案 . . . . .	87
5.1.3	多体dark量子态的特性 . . . . .	90
5.1.4	利用dark态实现多目标远程态制备方案 . . . . .	91
5.1.5	小结 . . . . .	97
5.2	消耗最少经典信息n-qubit “equatorial” 态RSP方案 . . . . .	97
5.2.1	单qubit “equatorial” 态RSP方案 . . . . .	97
5.2.2	2-qubit “equatorial” 态RSP方案 . . . . .	98
5.2.3	n-qubit “equatorial” 态RSP方案 . . . . .	100
5.2.4	n-qubit “equatorial” 态受控RSP方案 . . . . .	101
5.2.5	小结 . . . . .	103
5.3	利用QED腔实现单个qubit任意态RSP方案 . . . . .	104
5.3.1	第一种情形 . . . . .	104
5.3.2	第二种情形 . . . . .	105
5.3.3	小结 . . . . .	106
6	总结与展望 . . . . .	107
	参考文献 . . . . .	109
	攻读博士学位期间发表学术论文情况 . . . . .	119
	致 谢 . . . . .	121
	大连理工大学学位论文授权使用授权书 . . . . .	123



# 1 引言

量子信息学是建立在量子力学基本原理以及经典信息学理论基础之上新兴的交叉学科。它继承了经典信息学理论的基本概念和方法,并直接利用量子力学中的基本原理来实现量子计算以及量子通信。由于引入了量子力学中所固有的一些特性,因此量子信息学中出现了经典信息论中所没有的一些现象和概念,产生了一些全新的方法和理论,解决了一些经典信息学所不能解决的问题,从而引起了越来越多的研究者的关注,掀起了量子信息理论研究热潮。经过近二十年的探索和研究,量子信息学已经逐步发展成为一门多学科互相渗透的综合性交叉学科。随着研究逐步深入,量子信息学必将展示其潜在的巨大应用价值,并将为现代信息技术进一步发展开辟一片全新的领域。

## 1.1 经典信息科学的发展及其面临的挑战

在人类漫长的发展历程中,有三个不可缺少的要素始终支配着人类最基本活动,那就是物质、能量和信息。在当今高度发展的信息技术支持下,通过一系列的流通、加工、存储和转换过程作用于用户时,信息可以为人类创造出更多、更好的物质财富和精神财富,成为人类社会赖以生存的主要资源。而作为一门科学,信息论诞生于上个世纪40年代。1948年,信息论的创始人,美国工程师C.E.Shannon发表了一篇划时代文章“通信的数学理论”<sup>[1]</sup>,标志着一门崭新学科——信息论的建立。近60年来,以shannon理论为核心的经典信息理论经历了一个发展和成熟的过程。随着信息化时代的到来,信息已经渗透到人类社会各个方面,越来越被人们所重视。随着信息技术飞速发展和广泛应用,人们所获得的信息越来越多,对信息的依赖程度也变得越来越高。

计算机是信息处理工具,几乎和shannon信息论出现的同时,诞生了第一代电子计算机。随着计算机技术的进步,信息存储、显示、处理和利用发生了根本性变化。信息在当代社会进步中的重要作用和广泛影响与计算机进步有密不可分的联系。

信息加工、存储与处理等各个环节的核心部件是芯片(chip),不断提高芯片的集成度是计算机乃至整个信息科学的核心问题。1965年,世界计算机产业巨头,英特尔公司创始人之一,工程师摩尔(Gordon Moore)提出关于芯片发展趋势有名的定律——人们称之为Moore定律<sup>[2]</sup>。Moore定律指出:“由于持续创新使计算机处理器的能力每18个月就翻一番。也就是说,为了处理一个比特(bit)信息所需要的原子数目将每18个月减少一半”。这一定律至今仍在起作用,因此,用不了多久,电路线宽将不可避免地达到仅有单个分子大小的物理学极限。如果芯片集成单元达到原子量级,将不可避免地出现量子效应,由此带来的量子噪声将严重影响信噪比的提高。当芯片集成单元达到原子量级

时,逻辑运算过程中的热耗散能力将到达极限值,无法再提高芯片的集成度。

另一方面,目前的信息科学远远不能满足信息产业需求。比如说,金融界的保密系统是建立在大数的素数分解上,大数分解要靠计算机。迄今,在实验室上被分解的最大数为129位数。1994年,人们曾同时使用全球最好的1600个工作站,花了8个月的时间才完成了这个数的计算机分解,而金融界的保密系统需要分解更大的数,需要更长的时间。可见,目前的计算机功能离信息产业对计算机功能的要求还很远,但提高计算机的关键部件——芯片集成度又有它的极限。所以,21世纪,信息科学的进一步发展将面临危机。

21世纪的人类社会是一个高度信息化的社会。电子化、数字化趋势已经波及社会生活各方面。人们之间的信息交换变得越来越频繁,许多经济和社会活动,例如电子银行、电子商务以及重要文件、数据存储等等,都十分依赖于信息和通讯。在这些信息交换活动中,大量的信息以数据形式存放在各种电子设备中,信息传输也是通过公共信道来完成,而这些电子设备以及公共通道由于本身的物理特性,很容易受到恶意攻击和破坏,从而使得窃取、篡改信息的行为很难被发现。因此,人们对于信息安全传输及其保密存储提出了更高的要求。

因此,经典通讯理论及以电子器件为基础的电子计算机无法满足信息产业需求,必须寻找能够突破信息科学极限的新原理、新方法和新途径。

## 1.2 量子信息学的产生

量子论是20世纪科学史上重大发现之一,与相对论一起掀起了一场划时代的物理学革命。从20世纪20年代量子力学诞生至今80多年来,量子力学理论取得了巨大的成功。这个理论不仅解释了原子、原子核结构、化学键、物体超导电性、固体结构、半导体性质、基本粒子产生和湮灭等许多重要物理问题,而且也促成了现代微电子技术、激光技术、新能源技术、新材料科学的出现和发展。尽管人们对量子力学理论的解释还存在着这样或那样不同的看法,但它作为一个成功的物理理论,没有人怀疑过它的正确性。在20世纪80年代以前,信息理论、计算机科学和量子力学作为不同学科互相平行地发展,几乎无人注意到它们之间的交叉和联系。在过去的信息理论、计算机科学中,除去信息存储,信息传输和信息处理需要借助于物理手段外,这些科学本身似乎和物理学没有太多联系。最近20多年来,人们越来越清楚地认识到,信息论、计算机科学和物理学存在着深刻的、密切联系。信息,归根结底是编码在物理系统态中的东西,从物理角度看,信息源于物理态在时空中的变化,信息传输是编码物理态的传输,信息处理是被称为“计

算机”的物理系统态的有控制演化,信息提取则是对编码物理态的测量。信息论、计算机科学和物理学的联系不仅表现在信息需要借助于物理手段存储、传输和处理,而且还表现在这些科学概念、原理都要受到基本物理规律的制约。当编码信息的态从经典物理理解过渡到量子物理解时,由于量子态具有根本不同于经典物理态的性质,对经典物理为基础的信息论和计算机科学不可避免地要重新加以审视。量子态奇妙特性,如量子态的完备性、不可克隆性、全同性、纠缠性和非局域性等已成为宝贵的物理资源被用到信息科学中去,为信息科学提供了崭新的原理和方法,在提高运算速度、确保信息安全、增大信息容量和提高检测精度等方面可能突破现有的经典信息的极限。于是,诞生了一门新的科学分支—量子信息学。量子信息科学是量子力学与信息科学相结合的产物,包括:量子密码术、量子通信、量子计算机和量子测量等,近年来在理论和实验上已经取得重要突破,引起各国政府、科技界和信息产业界的高度重视,人们越来越坚信,量子信息学为信息科学的发展开创了新的原理和方法,注入了新的活力,将在21世纪发挥巨大潜力。

量子计算机中数据用量子位存储。由于量子叠加效应,一个量子位可以是0或1,也可以既存储0又存储1。因此一个量子位可以存储2个数据,同样数量的存储位,量子计算机的存储量比通常计算机大许多。同时量子计算机能够实行量子并行计算,其运算速度可能比目前个人计算机晶片快10亿倍。目前正在开发中的量子计算机有3种类型:核磁共振(NMR)量子计算机、硅基半导体量子计算机、离子阱量子计算机。

### 1.3 量子信息学的研究现状

量子纠缠现象在通讯中的应用,创造出“绝对安全密钥”、“稠密编码”、“隐形传态”等经典信息理论不可思议的奇迹;已经构造出“分解大数因子”、“未加整理的数据库搜索”等问题的量子算法。利用理想的量子计算机,可以实现大规模的并行计算,产生经典计算机不可比拟的信息处理功能等。在实验研究方面,已经成功地实现了局域网上的量子密钥分配,以及量子隐形传态。在量子逻辑门的物理实现方面已经找到了八个物理系统,并成功地实现了基本逻辑门运算。1985年,D. Deutsch根据量子力学基本原理,首先系统地研究了量子计算机的一般模型。1994年,P. Shor发现了一种量子算法(quantum algorithm),这个算法可在所设想的量子计算机上实现大数的素数分解,而且能够成千上万倍地提高素数分解速度。例如,利用Shor的算法,一个400位大数的素数分解只需要3年的时间,而如果用经典计算机则需10<sup>10</sup>年。Shor算法的发现为量子计算和量子计算机的实际应用提供了有力的根据,把量子计算机的研究推上了新的

热潮。1997年, Grover又发现了量子搜索法 (quantum search)。量子搜索法利用一种迭代算法, 在设想的量子计算机上实现未加整理的数据库中搜索目标数据。利用量子搜法, 可以把搜索问题从经典的 $N$ 步缩小到 $\sqrt{N}$ 步, 大大减少了搜索时间。量子计算机本质上是一个量子力学体系。量子计算是量子力学体系的量子态随时间演化过程。量子计算机由存储器、量子逻辑“线路”和测量设备构成。所谓逻辑器件就是通用逻辑门。通用逻辑门有好几种方案, 目前设想应用最多的就是单比特逻辑门(如非门、相位门和Hadamard门)加上受控双比特逻辑门(C-Not gate)。这些逻辑门实际上都是对存储器上所制备量子态实施么正变换的控制设备。因此, 在量子计算机中, 数据存储和数据处理是在同一个体系(存储器)上实行的。这是量子计算机与经典计算机的重要区别之一。目前研究中的存储器主要有腔QED、离子阱、核磁共振、量子点操纵、超导量子干涉方案, 现在还很难说哪一种方案更有前景。对一个制备 $N$ 个量子比特的量子计算机, 量子计算是通过如下过程进行: 先把 $N$ 个量子比特制备成标准的初态, 然后对初态实行么正操作 $U$ ,  $U$ 是由一些通用量子门的乘积构成, 再对经 $U$ 变换得到的结果再进行量子逻辑运算, 得到计算结果。量子计算主要由3步来完成: 输入数据、逻辑运算和量子测量。目前已实现了半导体量子点中实现光控C-Not量子门——固体量子门、线性光学器件实现概率CNOT门和离子阱实现可控相位门与C-Not门。在量子通讯方面已成功实现了184.6公里光纤量子通信和23公里自由空间量子通信, 但量子通讯仍停留在实验水平上。长期目标: 建立卫星量子中继站, 实现全球量子通讯。

#### 1.4 本文的研究内容

本文主要从理论上研究量子信息远程传输过程。量子通讯是量子信息学的重要组成部分, 量子通讯过程就是量子信息的远程传输过程。而量子态是量子信息的载体, 因此, 从某种意义上说, 量子信息远程传输过程就是量子态的远程制备过程。量子态的远程制备包括量子隐形传态 (Teleportation) 和远程态制备 (Remote State Preparation (RSP))。本文着重从以下几个方面来研究量子信息远程传输过程: 非对称类-W态的制备、无需Bell态测量的量子隐形传态、受控量子信息远程传输、消耗最少资源的RSP方案及任意态RSP方案。

本文的章节安排如下:

第2章介绍了量子信息学中的基本概念, 阐述了量子通讯的主要内容及研究现状, 介绍了量子计算中常用的几种逻辑门, 并举例解释为什么量子计算机能实现快速运算, 描述了目前文献中出现的几种典型量子计算机模型工作原子及各自的优缺点。

第3章简单介绍腔量子电动力学方法中原子与单模腔场相互作用的J-C模型,回顾了二原子体系和多原子体系与共振腔场及大失谐腔场相互作用制备纠缠态方案。根据原子与大失谐腔场相互作用规律,我们提出了多个二能级原子对称W态及非对称类-W态的制备方案并对该方案的实现进行了论证,并分析了两种类-W态的纠缠度与体系中总粒子数及不同粒子之间的关系。

第4章首先给出了一种无需直接Bell态测量的量子隐形传态方案。然后提出如何只用一个EPR对或一个GHZ态实现多体类-GHZ态的隐形传态方案。给出了用两种非对称类-W态实现确定的量子隐形传态方案。并分析了能实现确定隐形传态的量子纠缠态特点。总结出量子通道纠缠度与量子隐形传态成功概率的定性关系。

第5章首先提出如何用EPR对做为量子通道来实现量子系统“equatorial”态的远程制备,所传输的经典信息量及消耗的量子资源与Pati<sup>[3]</sup>方案一样。然后,用一个GHZ态来代替一个EPR对,进一步给出受控RSP方案。最后,我们借助于腔QED理论,阐述了实现单个qubit任意态远程态制备的两种方案。

第6章对本文工作做出总结并对未来工作提出展望。



## 2 量子信息的基本概念与基本功能

### 2.1 量子比特

在经典信息理论中,信息的基本单元是比特(bit),比特是一个两态物理系统,它可以制备为分立的、可识别的两个状态中的一个,比如二极管的两种状态,可以用0或1来表示。在量子信息理论中,量子信息的基本单元称为量子比特(qubit),它也是一个两态物理系统,两态分别用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ ,比如二能级原子、极化光子,自旋为 $\frac{1}{2}$ 粒子等。量子比特可以处在这两个态的叠加态上,即:

$$|\phi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle, \quad (0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (2.1.1)$$

这是与经典比特的区别。有时,一个量子比特也称一个量子位。

$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两个独立基矢张起一个2-维Hilbert空间,一个qubit的状态就用这个2-维Hilbert空间的一个态矢量来表示。 $n$ 个qubit的状态是 $n$ 个单qubit的直积态,因此可以写成

$$|\phi\rangle = |\phi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\phi\rangle_n. \quad (2.1.2)$$

一般地, $n$ 个qubit的态张起一个 $2^n$ -维的Hilbert空间,存在着 $2^n$ 个正交、归一、完备基矢,每一个基矢都是由一个 $n$ 位二进制数来表示。 $n$ 个qubit的任意态就是由这 $2^n$ 基矢线性叠加而成的。

量子信息是由量子态来表示的,所以,有关量子信息的问题必须遵从量子力学规律:量子信息的演化遵从Schrödinger方程,量子信息的传输就是量子态在量子通道中传输,量子信息的处理就是量子态的有控制的幺正演化,信息提取就是对编码量子态的测量。

### 2.2 量子系统的定态描述

在量子计算中,我们关心的量子系统——量子计算机往往并不是独立的,它与环境一起构成一个大的量子系统,在这种情况下,如何描述一个大系统中的一个子系统及各子系统之间的关系,对量子计算及量子通讯无疑是十分重要的。

#### (1) 纯态和投影算符

可以用一个态矢量描写的状态称为纯态,如单个量子位态(2.1.1)式和 $n$ 量子位集合态(2.1.2)式都是纯态的例子。对于每一个纯态 $|\psi\rangle$ 定义一个投影算符

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (2.2.1)$$

容易证明投影算符具有以下重要性质:

- 1) 厄密性  $\rho^\dagger = \rho$ ;
- 2) 正定性  $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$ ;
- 3) 么迹性  $\text{tr} \rho = 1$ ;
- 4) 等幂性  $\rho^2 = \rho$ 。

任意力学量平均值可以通过投影算符表示为

$$\bar{F} = \text{tr}(\rho F). \quad (2.2.2)$$

由此可见, 量子系统的纯态也可以用投影算符来表示。

### (2) 混合态和密度算符

若一个量子系统以概率  $P_k$  处于纯态  $|\psi_k\rangle$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), 且  $\sum_{k=1}^N P_k = 1$ ,  $|\psi_k\rangle$  之间不一定正交, 彼此间也不存在着固定的相对位相差, 则称  $\{P_k, |\psi_k\rangle\}$  为纯态系综, 系综的态称为混态, 定义密度算符

$$\rho = \sum_{k=1}^N |\psi_k\rangle P_k \langle \psi_k| \quad (2.2.3)$$

来描述一个系综的混态。在混态下, 求一个力学量算符  $F$  的平均值仍可以归结为(2.2.2)式。特别是在混态中, 如果仅有一个  $P_j$  不等于零,  $P_k = \delta_{kj}$ , 则(2.2.3)式中的密度算子化为纯态的投影算符, 所以, 纯态是混态的特例。可以证明, 混态密度算符  $\rho$  满足厄密性、正定性、么迹性, 但不具有等幂性  $\rho^2 \neq \rho$ 。

### (3) 子系的状态和约化密度算符

假设一个量子系统是由两个子系统 A、B 所构成的。当总系统处在  $\rho_{AB}$  描述的态时, 子系 A、B 的状态就由相应的约化密度算符来描述, 即

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_{j=1}^N {}_B \langle j | \rho_{AB} | j \rangle_B, \quad \left( \sum_{j=1}^N |j\rangle_B \langle j| = 1 \right) \quad (2.2.4a)$$

$$\rho_B = \text{tr}_A(\rho_{AB}) = \sum_{i=1}^M {}_A \langle i | \rho_{AB} | i \rangle_A, \quad \left( \sum_{i=1}^M |i\rangle_A \langle i| = 1 \right). \quad (2.2.4b)$$

## 2.3 保真度

量子信息是编码在量子态中的信息, 无论是量子计算还是量子通讯, 人们都希望输出的量子态与目标态尽可能接近, 度量两个量子态之间距离方法之一就是保真

度 (fidelity)。状态 $\rho$ 和状态 $\sigma$ 的保真度定义为

$$F(\rho, \sigma) \equiv \text{tr} \sqrt{\rho^{\frac{1}{2}} \sigma \rho^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.3.1)$$

下面我们看一下两种特殊情况下的保真度。第一种是当 $\rho$ 和 $\sigma$ 是对易的，即在某个正交基 $|j\rangle$ 下，两密度算符都是对角的，即

$$\rho = \sum_j r_j |j\rangle\langle j|, \quad \sigma = \sum_j s_j |j\rangle\langle j|. \quad (2.3.2)$$

这种情况下的保真度为

$$F(\rho, \sigma) = \text{tr} \sqrt{\rho\sigma} = \text{tr} \sqrt{\sum_j r_j s_j |j\rangle\langle j|} = \text{tr} \left( \sum_j \sqrt{r_j s_j} |j\rangle\langle j| \right) = \sum_j \sqrt{r_j s_j} = F(r_j s_j). \quad (2.3.3)$$

当 $\rho$ 和 $\sigma$ 对易时，量子保真度 $F(\rho, \sigma)$ 还原为 $\rho$ 和 $\sigma$ 本征值分布 $r_j$ 和 $s_j$ 之间的经典保真度 $F(r_j s_j)$ 。

第二个特例是计算纯态 $|\psi\rangle$ 和任意态 $\rho$ 之间的保真度，由保真度定义(2.3.1)式可得，

$$F(|\psi\rangle, \rho) = \text{tr} \sqrt{\sqrt{|\psi\rangle\langle\psi|} \rho \sqrt{|\psi\rangle\langle\psi|}} = \text{tr} \sqrt{\langle\psi|\rho|\psi\rangle |\psi\rangle\langle\psi|} = \sqrt{\langle\psi|\rho|\psi\rangle} \quad (2.3.4)$$

即，保真度等于 $|\psi\rangle$ 和 $\rho$ 之间重叠部分的平方根，这是我们经常用到的一个重要结果。

## 2.4 量子纠缠

量子纠缠现象是量子力学特有的现象，是量子力学区别于经典力学的重要特征之一。做为一种新类型的资源，纠缠态在量子信息学中起着举足轻重的作用，许多量子信息处理任务都离不开纠缠。可以说，没有量子纠缠现象，就没有量子信息学。鉴于纠缠在量子信息学中重要地位，本节我们介绍一下量子纠缠概念、纠缠度量及纠缠变换。

### 2.4.1 量子纠缠定义

#### (1) 纯态纠缠

考虑由子系A和B组成的复合体系。设 $\{|j\rangle_A\}$ 和 $\{|k\rangle_B\}$ 分别是子系A和B的一组力学量完全集的共同本征态，则 $\{|k\rangle_A |j\rangle_B\}$ 为复合系统的完备基矢，复合系统的任意纯态都可以表示为

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{jk} C_{jk} |j\rangle_A |k\rangle_B. \quad (2.4.1)$$

这样的纯态可以分为纠缠态和非纠缠态。

设 $|\phi\rangle_A$ 和 $|\phi\rangle_B$ 分别是子系A、B的纯态。如果复合系统的量子态可以写成两子系统纯态直积的形式,即

$$|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B, \quad (2.4.2)$$

则复合系统处于非纠缠态或可分离态。但如果复合系统不能写成两子系统纯态直积的形式,则描述复合系统的量子态 $|\psi\rangle_{AB}$ 是纠缠态或不可分离态。

我们将以上纠缠态的定义加以推广,如果复合系统是由N个子系统构成, $|\phi\rangle_i$ 是第i个子系的纯态,当复合系统的纯态不能写成子系态直积的形式:

$$|\psi\rangle = \prod_i |\phi\rangle_i, \quad (2.4.3)$$

则复合系统纯态 $|\psi\rangle$ 为纠缠态,否则为非纠缠态。

## (2) 混态纠缠

一个由N个子系构成的复合系统,每一个子系统处在混态,每一个子系有M个可能的态,当复合系统量子态不能写成形如

$$\rho = \sum_i^M P_i |\psi^i\rangle_A \langle\psi^i| \otimes |\phi^i\rangle_B \langle\phi^i| \otimes \cdots \otimes |\chi^i\rangle_N \langle\chi^i|, \quad (2.4.4)$$

的形式,则称复合系统的混态为混态纠缠。

## 2.4.2 量子纠缠度量

纠缠在量子态传输、稠密编码、密钥分配、量子计算及量子纠错等方面都起关键性作用,是一种重要的信息资源,为了能更好地理解利用这种资源,我们需要引入纠缠度的概念来定量地描述子系统之间的纠缠程度。做为量子纠缠的定量描述应满足以下几个基本条件:

(1) 可分离态的纠缠度应为零。

(2) 由于纠缠是由于物理上相互作用的两体或多体联合的幺正演化而产生的,所以对任意子系统进行的任何局域幺正变换不应改变总系的纠缠度。

(3) 在对各部分的局域操作以及彼此间经典通讯(LOCC),以便交换信息对各部分局域地执行联合操作,总系的纠缠度不应增加。比如,在双方的LOCC操作下,4个Bell基可以相互转化,但它们的纠缠度相当。再比如,Alice与Bob共

享EPR对 $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ , Alice 执行由测量算子 $M_1$ 和 $M_2$ 描述的双输出测量,

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

测量后, 测量的结果成为1或为2, 状态成为 $\cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle$ 或 $\cos\theta|11\rangle + \sin\theta|00\rangle$ , 经过这样一个局域测量, 后面我们将会看到, 体系的纠缠度变小了。

(4) 对于直积态, 纠缠度应当是可加的。

目前, 有多种纠缠度定义, 本文我们用到的纠缠度是部分熵纠缠度<sup>[5]</sup>。当两体态处在纯态 $|\psi\rangle_{AB}$ 时, 部分熵纠缠度 $E_P(|\psi\rangle_{AB})$ 定义为

$$\begin{cases} E(|\psi\rangle_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B), \\ S(\rho_A) = -\text{tr}_A(\rho_A \log \rho_A); \quad S(\rho_B) = -\text{tr}_B(\rho_B \log \rho_B), \\ \rho_A = \text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|); \quad \rho_B = \text{tr}_A(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|). \end{cases} \quad (2.4.6)$$

这里,  $S(\rho_A)$ 和 $S(\rho_B)$ 为子系的Von Neumann熵<sup>[6]</sup>。

### 2.4.3 量子纠缠变换

在量子通讯及量子计算中, 有时要将某种形式的纠缠变换成另一种形式, 并要求具有高的保真度。另外, 纠缠作为一种物理资源, 无论它以何种形式存在, 都应该与其它资源一样可以进行量化。假设我们以EPR对 $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ 作为纠缠的标准单位(1 ebit), 定义一个纯态 $|\phi\rangle$ 中的纠缠量, 一种可能办法是设想被给定了一个大的数目 $n$ 个Bell态 $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ , 利用局域操作和经典通信产生尽可能多的、高保真度的 $m$ 个 $|\phi\rangle$ 备份。那么, 定义极限情况的比值 $n/m$ 为状态 $|\phi\rangle$ 形成的纠缠, 这一过程叫做纠缠的稀释。也可以设想一个逆向过程, 从 $|\phi\rangle$ 的 $m$ 个备份中, 用LOCC转换为 $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ 的 $n$ 个备份, 定义极限比 $n/m$ 为状态 $|\phi\rangle$ 的可蒸馏纠缠, 这一过程叫做纠缠蒸馏。

#### 1、纠缠变换的重要定理<sup>[9-11]</sup>

(1) 典型序列定理。设一个二元经典信源 $X$ 输出符号集为 $x \in \{0, 1\}$ , 对应的出现概率为 $p(x) \in \{p, 1-p\}$ , 则Shannon熵为

$$H(X) = -p \log p - (1-p) \log(1-p) \equiv H(p). \quad (2.4.7)$$

则 $n$ 次扩展信源的输出符记序列为 $x_1 x_2 \cdots x_n$ , 该序列出现的概率为 $p(x_1)p(x_2) \cdots p(x_n)$ 。非常可能出现的序列称为典型序列, 很少出现的序列称为非典型序列。给定一个正小

数 $\varepsilon$ , 若

$$2^{-n(H(X)+\varepsilon)} \leq p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n) \leq 2^{-n(H(X)-\varepsilon)}. \quad (2.4.8)$$

则称信源的一串符号 $x_1x_2\cdots x_n$ 为 $\varepsilon$ 典型序列, 关于典型序列定理如下:

- i) 固定 $\varepsilon$ , 则对任意正小数 $\delta$ 和充分大的 $n$ , 一个序列为 $\varepsilon$ 典型序列的概率至少是 $1-\delta$ .
- ii) 对任意固定的 $\varepsilon$ 和 $\delta$ 及充分大的 $n$ ,  $\varepsilon$ 典型序列的数目 $N(\varepsilon, \delta)$ 满足

$$(1-\delta)2^{n(H(X)-\varepsilon)} \leq N(\varepsilon, \delta) \leq 2^{n(H(X)+\varepsilon)}. \quad (2.4.9)$$

(2) 典型子空间定理. 使量子纠缠操作成为可能的关键是量子版本的典型序列. 设与一个量子信源相关的密度算符 $\rho$ 为

$$\rho = \sum_x p(x)|x\rangle\langle x|, \quad (2.4.10)$$

其中 $|x\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle\}$ 是正交基矢,  $p(x)$ 是 $\rho$ 的本征值,  $H(p(x)) = S(\rho)$ ,  $n$ 次扩展量子信源的量子态可表示为

$$\begin{aligned} \rho^{\otimes n} &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)|x_1\rangle\langle x_1| \otimes |x_2\rangle\langle x_2| \otimes \cdots \otimes |x_n\rangle\langle x_n| \\ &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} p(x_1x_2\cdots x_n)|x_1\rangle\langle x_1| \otimes |x_2\rangle\langle x_2| \otimes \cdots \otimes |x_n\rangle\langle x_n| \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$p(x_1x_2\cdots x_n)$ 是 $\rho^{\otimes n}$ 的本征值. 则 $\varepsilon$ 典型状态序列 $|x_1\rangle|x_2\rangle\cdots|x_n\rangle$ 定义为

$$2^{-n(S(\rho)+\varepsilon)} \leq p(x_1x_2\cdots x_n) \leq 2^{-n(S(\rho)-\varepsilon)}. \quad (2.4.12)$$

所有 $\varepsilon$ 典型状态所张成的子空间称 $\varepsilon$ 典型子空间.

典型子空间定理:

- i) 固定 $\varepsilon$ , 则对任意正小数 $\delta$ 和充分大的 $n$ ,

$$p(x_1x_2\cdots x_n) = \text{tr}(P(n, \varepsilon)\rho^{\otimes n}) \geq 1 - \delta. \quad (2.4.13)$$

$P(n, \varepsilon)$ 为 $\varepsilon$ 典型子空间上的投影算符

$$P(n, \varepsilon) = \sum_{x \in \text{typical}} |x_1\rangle\langle x_1| \otimes |x_2\rangle\langle x_2| \otimes \cdots \otimes |x_n\rangle\langle x_n| \quad (2.4.14)$$

- ii) 对任意固定的 $\varepsilon$ 和 $\delta$ 及充分大的 $n$ ,  $\varepsilon$ 典型状态的数目 $N(\varepsilon, \delta)$ 满足

$$(1-\delta)2^{n(S(\rho)-\varepsilon)} \leq N(\varepsilon, \delta) \leq 2^{n(S(\rho)+\varepsilon)} \quad (2.4.15)$$

Shumacher量子无噪声编码定理<sup>[10]</sup>、纠缠蒸馏和稀释<sup>[12-14]</sup>都是典型状态序列的应用。

(3) 2-体纯态纠缠变换定理<sup>[11]</sup>

设 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 是2-体纯态, 其Schmidt分解形式为

$$|\psi\rangle = \sum_{l=1}^d \sqrt{\lambda_l^\psi} |l_A\rangle |l_B\rangle, \quad |\phi\rangle = \sum_{l=1}^d \sqrt{\lambda_l^\phi} |l_A\rangle |l_B\rangle. \quad (2.4.16)$$

这里的 $\lambda_l^\psi$ 和 $\lambda_l^\phi$ 均按递减顺序排列,  $|l\rangle$ 为d-维子系统的正交基矢。

定理1: 当仅当 $\sum_{j=1}^k \lambda_j^\psi \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j^\phi$ 对 $k = 1, 2, \dots, d$ 均成立时, 2-体纯态 $|\psi\rangle$ 可以被LOCC变换为另一纯态 $|\phi\rangle$ 。

定理2: 若 $|\psi\rangle$ 可以被LOCC变换为另一纯态 $|\phi\rangle$ , 则该变换可由仅包含如下步骤的协议来完成。Alice进行一次由测量算符 $M_j$ 描述的测量, 把测量结果 $j$ 发送给Bob, Bob再对他的子系统实施么正操作 $U_j$ 。

## 2、纠缠稀释与纠缠蒸馏

下面简单介绍一下纠缠稀释和蒸馏的协议。设2-体纠缠态 $|\psi\rangle$ 具有Schmidt分解形式

$$|\psi\rangle = \sum_x \sqrt{p(x)} |x_A\rangle |x_B\rangle. \quad (2.4.17)$$

式中平方后的Schmidt系数 $p(x)$ 是子系统A、B约化密度算符的本征值, 这些系数满足通常概率分布规则(非负数并且和为1)。m重张量积 $|\psi\rangle^{\otimes m}$ 可以表示为下面的形式

$$|\psi\rangle^{\otimes m} = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_m} \sqrt{p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_m)} |x_1 x_2 \cdots x_m\rangle_A |x_1 x_2 \cdots x_m\rangle_B. \quad (2.4.18)$$

若忽略非 $\varepsilon$ 典型状态序列 $|x_1\rangle|x_2\rangle\cdots|x_m\rangle$ , 则上式变为一个新状态 $|\phi'_m\rangle$

$$|\phi'_m\rangle = \sum_{x \in \text{typical}} \sqrt{p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_m)} |x_1 x_2 \cdots x_m\rangle_A |x_1 x_2 \cdots x_m\rangle_B. \quad (2.4.19)$$

将 $|\phi'_m\rangle$ 归一化为 $|\phi_m\rangle \equiv |\phi'_m\rangle / \sqrt{\langle \phi'_m | \phi'_m \rangle}$ 。由典型子空间定理第1部分可知, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 保真度 $F(|\psi\rangle^{\otimes m}, |\phi_m\rangle) \rightarrow 1$ 。再由典型子空间定理的第2部分, 可以断定(2.4.19)式中的项数最多为 $2^{m(S(\rho_\psi) + \varepsilon)}$ ,  $\rho_\psi$ 是(2.4.17)式中, 子系统A或B的约化密度算符。

假设Alice和Bob共享有 $n = m(S(\rho_\psi) + \varepsilon)$ 个Bell。Alice在本地将量子态 $|\phi_m\rangle$ 制备在A、B子系统中, 然后用与Bob共享的Bell态作为量子通道, 通过隐形传态把 $|\phi_m\rangle$ 中子系统B的量子态传给Bob。这样, Alice和Bob可以稀释他们的n个Bell态得到 $|\phi_m\rangle$ , 这

是 $|\psi\rangle^{\otimes m}$ 的一个很好近似。这相当于将 $n$  ebits的纠缠量稀释为 $m$ 份，每一份的纠缠量约等于 $S(\rho_\psi)$ 。

沿着逆思路可给出 $|\psi\rangle$ 的备份转换成Bell态的纠缠蒸馏协议。设Alice和Bob共同拥有 $m$ 个 $|\psi\rangle$ 的备份。Alice通过对 $\rho^{\otimes m}$ 的 $\epsilon$ 典型子空间上的测量，可以很高的保真度把量子态 $|\psi\rangle^{\otimes m}$ 转换为态 $|\phi_m\rangle$ 。由典型状态序列的定义(2.4.12)式可知，在 $|\phi'_m\rangle$ （见(5.2.19)式）中Schmidt系数至多是 $2^{-n(S(\rho_\psi)-\epsilon)}$ ，归一化后的状态 $|\phi_m\rangle$ 的Schmidt系数至多存在一个因子 $1/\sqrt{1-\delta}$ ，所以，状态 $\rho_{\phi_m}$ 的最大本征值为 $2^{-n(S(\rho_\psi)-\epsilon)/(1-\delta)}$ ，选择任意正整数 $n$ ，使得

$$\frac{2^{-n(S(\rho_\psi)-\epsilon)}}{1-\delta} \leq 2^{-n}. \quad (2.4.20)$$

据定理1和定理2，状态 $\rho_{\phi_m}$ 可以通过本运算和经典通信转换为 $n$ 个Bell态，即一个 $|\phi\rangle$ 态可提纯 $S(\rho_\psi)$ 个Bell态，也可以说一个 $|\phi\rangle$ 可以蒸馏 $S(\rho_\psi)$  ebits的纠缠。

总之，量子纠缠是量子力学特有的奇特现象，它可以度量，可以进行纠缠浓缩和稀释，纠缠还可以转移。当共处于一个纯态的两个子系统执行类空分离测量，对其中一个子系的测量，虽然不能对另一个子系统产生直接的相互作用，但却隐含了另一子系的信息，并瞬时地改变了另一个子系统状态，这种现象称为量子力学的非局域性。将这种关联的非局域性应用到量子通讯中，可创造出“绝对安全密钥”、“稠密编码”、“隐形传态”等经典信息论不可思议的奇迹。

目前，实验上已实现的纠缠态制备主要有以下几种方式：

(1) 双光子纠缠态<sup>[7]</sup>。单光子流通过一种非线性晶体，经过所谓的自发参数变换得到两个光子的量子纠缠态，称为双光子态(biphoton state)。

(2) 1999年实验实现了三光子纠缠<sup>[42]</sup>，2000年，潘建伟等<sup>[44]</sup>利用三光子的GHZ纠缠态演示了量子非定域性。

(3) Sackett等又实现了四光子纠缠<sup>[8]</sup>。

(4) 2004年，潘建伟小组利用已有的四光子纠缠技术结合新发展的单光子源技术，在世界上第一次实现了五光子纠缠态<sup>[49]</sup>。

还有，量子点间纠缠的制备<sup>[59-61]</sup>，以及原子-腔相互作用实现原子之间、腔场之间或原子与腔场之间的纠缠<sup>[62-69,69,70]</sup>等。

#### 2.4.4 不可克隆定理

量子信息是用量子态编码的信息，量子态具有经典物理所没有的特殊性质，这就使量子信息具有和经典信息不同的新奇特性，量子不可克隆性就是其中之一。早

在1982年, Wootters<sup>[15]</sup>和Dieks<sup>[16]</sup>提出这样一个问题: 是否存在一种物理过程, 可以实现未知量子态的精确复制。可以证明, 量子态的线性叠加性禁止这样的复制, 这就是量子不可克隆定理的主要思想。

关于量子态的克隆定理可以表述如下: (1) 如果 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 是两个不同的非正交态, 不存在一个物理过程可以作出两者的精确复制; (2) 一个未知的量子态不可能被精确复制; (3) 要从编码在非正态量子态中获信息, 而不扰动这些态是不可能。

未知量子态的不可克隆性是量子力学的固有特性, 是量子密码术的重要前提, 它确保了量子密码的安全性, 使窃听者不可能采取克隆技术获得全部有用信息。

## 2.5 量子通讯

### 2.5.1 量子密码术

密码技术在世界各国的军事、外交、商业等领域有着广泛的应用。目前所用的密码一般叫做经典密码, 最先进的经典密码是RSA密码, 它的安全性是基于大数因子分解一类不易计算的单向性函数。数学上虽没能严格证明这种密钥不可破译, 但现有经典计算机几乎无法完成这种计算。但随着计算机计算速度的不断提高, 有理由相信, 就目前最先进的密码—RSA密码也将变成能够破译的密码。另外, Shor量子算法<sup>[17]</sup>证明, 采用量子计算机可以轻而易举地破译这种公开密钥体系。这就对现有的密码术提出严峻挑战, 于是人们提出一种在原理上与经典密码截然不同的密码术——量子密码术。量子密码术是基于量子力学的测量理论, 由于波包塌缩的不可逆性, 在理论上这是一种不可窃听的密码。也就是说, 量子密码原则上是一种不可破译的密码, 如果量子密码方案能实现, 它将有广泛的应用前景。目前量子加密技术已在实验室实现, 而且人们正在寻找更为有效切实可行的量子加密方案。

Bennett曾于1984年和1992年分别提出过BB84<sup>[18]</sup>协议和B92<sup>[29]</sup>协议。BB84方案需要两组正交四个量子态实现量子密钥分配, 信息的载体是光子。该方案已经被证明是绝对安全<sup>[21,22]</sup>的密钥分配协议。但在BB84协议中, 由于发送方和接收方都是随机选择两组正交测量基中一个进行测量, 他们还需要做安全性检测, 因此不到50%的光子可以用来作为量子密钥。而且四个量子态只能编“0”的“1”两个二进制码, 编码容量低。而在B92密钥分配协议中, 只需要两个非正交的量子态就可以实现密钥分配。与BB84协议相比, B92协议更容易实现, 所需物理资源少, 编码容量大一倍。但信道有噪声, 因为窃听者可以将自己的窃听行为掩盖在噪声环境中, 并能窃听发送者编码在光子上的密钥信息, 因此B92协议的安全性就将受到威胁。另外, 密钥的接收者只有25%的几率得到测量

结果, 因此至少有75%的光子被丢掉, 导致资源的利用率不高。

1998年, Burb<sup>[20]</sup>提出了一个六态密钥分配协议。该协议是上述BB84方案的一个扩展。它的特点在于, 采用三组共六个测量基, 通信双方随机选定一组进行测量, Alice和Bob对于同一光子选择相同测量基进行制备和测量的几率只有1/3。因此要舍弃掉2/3量子资源。如果有窃听者存在, 她的窃听行为将导致33.3%的错误率, 该协议错误率大于BB84协议中的错误率(25%), 这将使通讯双方更容易检测到窃听行为的存在, 因此, 六态方案比BB84协议更安全。

除此以外还有测量基加密(MBE)密钥分配协议<sup>[26]</sup>、纠缠态密钥分配协议<sup>[23]</sup>、信息载体是一个三态系统的密钥分配协议<sup>[27]</sup>、相干态密钥分配协议<sup>[24]</sup>和压缩态协议<sup>[25]</sup>等。

近年来有许多来自各国的研究小组对量子密钥分配协议进行实验研究。量子密码通信在光纤中传输距离从最早的10公里(由英国国防研究部于1993年首次实现的)到目前的最新纪录184.6公里<sup>[28]</sup>(由美国Los Alamos实验小组在2006年实现的)仅历时十几年的时间, 因此, 我们有理由相信, 随着量子密码术在理论及实验上的不断完善, 用不了多久, 我们将会看到量子加密产品在国防、金融乃至日常生活中得到广泛应用。

### 2.5.2 量子稠密编码

在量子通讯与量子计算中, 一般用两态系统做为信息的载体, 如极化光子、两能级原子、自旋1/2粒子等。如果在量子通信中, 通信双方之间不存在量子纠缠, 为了传输一个经典位串(1001), Alice需要发送4个量子位给Bob, 而且这4个量子位事先依次制备在 $|1\rangle, |0\rangle, |0\rangle, |1\rangle$ 态上。当Bob接收到这四个量子位后, 只要Bob使用基矢 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 对每一个量子位进行测量, 即可得到位串(1001)。这种通讯方式, 发送一个量子位, 只能传输1 *cbit*的经典信息。

但如果通信双方间享有量子纠缠, 则可实现只传送一个量子位, 而传输2 *cbit*的经典信息。假设Alice和Bob分享EPR光子对

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B). \quad (2.5.1)$$

Alice可对粒子A实施一个一位门操作, 且双方约定如下的编码规则:

$$\begin{cases} 00 : I|\phi^+\rangle = |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B), \\ 01 : \sigma_z|\phi^+\rangle = |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B - |1\rangle_A |1\rangle_B), \\ 10 : \sigma_x|\phi^+\rangle = |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |1\rangle_B), \\ 11 : \sigma_y|\phi^+\rangle = |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_A |0\rangle_B - |0\rangle_A |1\rangle_B). \end{cases} \quad (2.5.2)$$

这样,当Alice把粒子A经幺正变换后发送给Bob, Bob对两粒子实施Bell基测量,据测量结果, Bob可以推定Alice对粒子A实施了何种操作,进而断定Alice要发给他的经典信息串。利用上述方法, Alice只发送一个量子位,通过纠缠提供的量子通道,传递了2 cbits的经典信息,这就是量子稠密编码概念<sup>[19]</sup>。

### 2.5.3 量子安全直接通讯

利用量子密码术进行通信是目前科学界公认的唯一能实现绝安全的通信方式,但这种通讯方式需要当事双方事先建立密钥,然后才能用这些密钥去加密待传信息、传输数据、解密获得信息。2002年,Beige提出一种量子安全直接通讯协议<sup>[30]</sup>,在通信双方之间直接传输确定性的信息,特别是机密信息的方法,而不需要加密、解密过程。Beige方案的本质是量子隐形传态与量子密集编码。Yan<sup>[31]</sup>提出相似的量子安全直接通讯协议。2002年,Boström和Felbinger<sup>[32]</sup>利用纠缠做为量子通道,提出了一个比较成熟的量子安全直接通信协议。由于该协议执行的过程中,量子比特需要在通信双方之间来回传送,因此此协议被形象地称为乒乓协议(Ping-pong protocol)。作为Ping-pong模型的推广,人们又提出了许多安全性强、容量大、经济实用、可操作性强的量子直接通信协议。例如,邓等人<sup>[33]</sup>提出的two-step量子安全直接通讯协议,该协议利用量子纠缠和量子密集编码,结合乒乓模型,用N个排序的EPR对 $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B)$ 作为数据块来直接传输秘密信息。A粒子用来编码信息,被称为信息编码序列,而B粒子构成检测序列。第一步, Alice将检测序列发给Bob后,双方进行随机测量,并互通测量结果,当确信量子通道是安全的后,进行下一步。第二步, Alice将信息编码在信息编码序列上,并将该序列发送给Bob。Bob通过对两个粒子序列进行联合测量,可直接读出Alice发给他的信息。这一过程是安全的,因为只有通过第一步安全检测后, Alice才将信息编码在A粒子上,所以,窃听者不可能同时获得两个粒子序列,纠缠系统量子特性决定了窃听者不可通过局域操作来窃听获取信息。

考虑到乒乓协议和基于乒乓协议的two-step协议中需要进行两比特纠缠态的联合测量,邓和蔡等人<sup>[34,35]</sup>提出了一次性便笺的协议,该协议不需要纠缠做为量子通道,只需要对单比特进行局域测量。人们还提出利用高维量子密集编码的量子直接安全通讯协议<sup>36</sup>,这一协议结合了块传输、量子乒乓直接通讯和量子密集编码的思想,该方案具有安全和高容量的特点。

以上各种协议都不能防止信息被窃听,但仍能保证信息是安全的。因为,一般情况下,窃听者在两种情况下截获信息:第一种情况是对携带信息的量子位进行测量,从而获取信息。但是,在量子通讯中,信息是编码在量子态上的,对量子态进行测量将会导

致态的塌缩,这样,会留下明显的窃听痕迹,通信双方在做安全检测时会发现有窃听者的存在,从而终止通讯。第二种情况是,先截获携带信息的粒子,然后复制该粒子的量子态,再将粒子传给信息的接收者,这一窃听行为不会留下明显的痕迹。但根据量子力学的不可克隆原理,未知量子态是不可能被精确复制的,窃听者不可能从截获的粒子中得到全部有用信息。所以,无论是哪一种情况,量子力学的特性都能保障所传输信息的安全性。基于这一点,我们相信,随着实验与理论研究的日趋成熟,量子安全直接通信将会有很好的发展前景。

量子密钥分配实验基本上可以分为光纤中的量子密钥分配方案以及自由空间中的量子密钥分配方案等两类。迄今为止,国际上公开报道的最长距离的实用光纤量子密钥分配系统是:2006年美国洛斯阿拉莫斯实验小组实现的184.6km的量子加密方案<sup>[28]</sup>。在中国,2005年,由郭光灿院士领导的中国科技大学中科院量子信息重点实验室设计了一种具有良好单向传输稳定性的量子密钥分配实验方案,实现了150公里的室内量子密钥分配实验;并利用中国网通公司的实际通信光缆,实现了从北京经河北香河到天津的量子密钥分配,实际光缆长度125公里,系统的误码率低于6%。在该系统的量子密钥分配基础上,实现了动态图像的加密传输,图像刷新率可达20帧/秒,基本满足网上保密视频会议的要求。

#### 2.5.4 量子隐形传态

量子隐形传态(Teleportation)是量子纠缠的重要应用之一,最早是由Bennet等六位科学家在1993年提出的<sup>[88]</sup>(见图2.1),即将某处粒子1的未知态 $|\phi\rangle$ 传送到另一个地方,使得另一处的粒子3处在态 $|\phi\rangle$ 上,而原来的粒子仍然留在原处。其基本过程是:粒子1处在未知量子态 $|\phi\rangle_1$ 上,信息的发送者(Alice)和接收者(Bob)之间事先共享一个最大纠缠态做为量子通道(2、3粒子的ERP对)。发送者对其拥有的两个粒子(1,2)施加一个联合测量,然后将测量结果通过经典通道传送给接收者,接收者根据这个信息对自己所拥有的粒子作相应的么正变换,这样就可以使接收者的粒子3处于粒子1的初始未知量子态上,而原来的粒子1仍留在Alice处,但其初始量子态已被破坏。量子力学的不确定原理和量子态不可克隆原理,限制我们将原量子态的所有信息精确地全部提取出来,因此必须将原量子态的所有信息分为经典信息和量子信息两部分,它们分别由经典通道和量子通道送到乙地,根据这些信息,在乙地构造出原量子态的全貌。量子隐形传态过程中实现量子信息传输具有以下几方面特征:

(1) 不存在信息瞬间传输。量子隐形传态过程,信息分为两部分:量子信息(进行测量时瞬间转移)和经典信息(不大于光速)。信息的接收者必须收到发送者的测量结

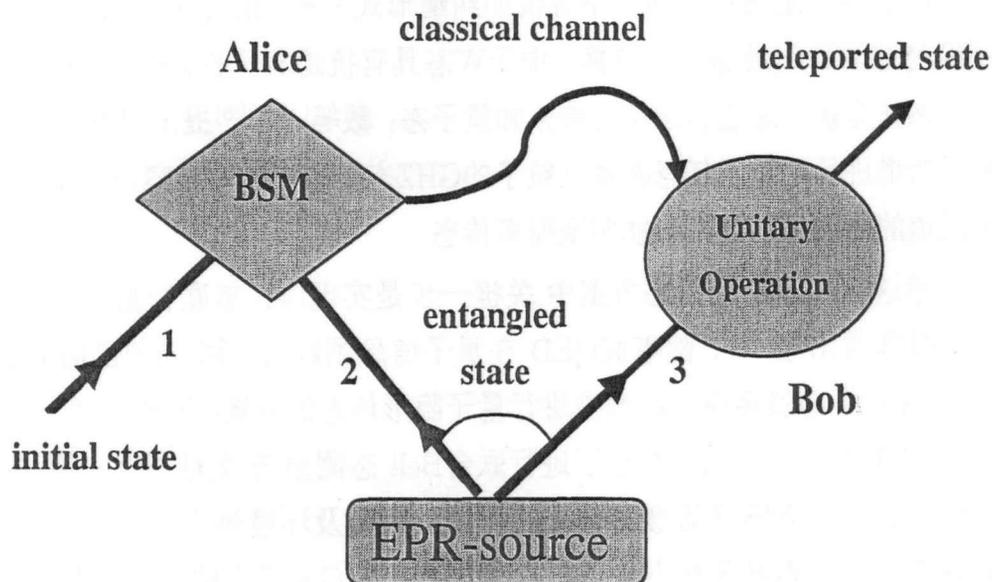


图 2.1 量子隐形传态原理图

Fig. 2.1 Illustration of the scheme of quantum teleportation

果（通过经典信道发送的经典信息），才能获得量子信息，所以量子隐形传态过程没有违背狭义相对论原理，最终的信息传递速度不大于光速。

(2) 通讯双方无需预先知道对方在哪里，转移过程不受任何障碍所阻隔，这是因为量子纠缠具有非局域性。

(3) 量子隐形传态不违背不可克隆定理<sup>[15,16]</sup>。因为发送者手中的粒子1在测量后已不处于原来的状态，该过程只是信息态转移（1粒子→3粒子），不是信息的复制。

(4) 发送者和接收者在整个传输过程中都不需要知道他们所传输的或者接收的量子态的任何信息，因而量子隐形传态提供了操控量子态而不破坏量子态的可能性。

在Bennett小组提出标准的量子隐形传态方案之后，人们提出了各种各样的量子隐形传态理论方案，例如：两粒子纠缠态和任意态<sup>[89-94]</sup>、多体纠缠态<sup>[95-99]</sup>、连续变量隐形传态<sup>[100-105]</sup>方案。在Bennett小组提出标准的量子隐形传态方案之后，因为作为量子通道的这些最大纠缠态在制备过程中会受到周围环境及其它因素的影响而很难得到，最终粒子对可能会处于部分纠缠或非最大纠缠态。因而，人们提出用部分纠缠态作为量子通道来实现概率隐形传态<sup>106-117</sup>方案是非常有实际意义的。以上提到的量子通讯方案中的量子通道主要是由2粒子的最大纠缠态或非最大纠缠态构成。1990年，Greenberger等人提出3粒子纠缠态-GHZ态（Greenberger-Horne-Zeilinger）<sup>[83]</sup>，随后人们提出用GHZ态做为量子通道以实现多目标共享的受控量子隐形传态方案<sup>[118-122]</sup>。在2000年，Dür等人

证明了三粒子两态系统存在两类不等价的纠缠形式——GHZ态和W态<sup>[82]</sup>，不可能通过么正变换使这两种纠缠态相互转换。由于W态具有抗退相干性，Shi等<sup>[123-126]</sup>提出利用三粒子W态作为量子通道传送单比特未知量子态；戴等<sup>[127,128]</sup>提出利用两个三粒子W态作为量子信道进行两粒子任意态及三粒子的GHZ态的隐形传态方案，但以上利用W态做为量子通道的隐形传态方案只能实现概率传态。

在上述这些实现隐形传态方案中，关键一步是实现Bell态联合测量。然而，实现Bell态联合测量非常困难<sup>[138]</sup>。随着腔QED在量子信息领域的应用，人们已提出了多种利用腔QED对单原子态及多原子纠缠态进行量子隐形传态的方案<sup>[81,139-143,147]</sup>。在这些方案中，量子隐形传态过程中无需对原子进行联合Bell态测量，在文献<sup>[81,141-143]</sup>中，由于原子受到一个外加强经典场驱动，使传输过程不受腔泄漏及环境热库的影响。基于EPR对下的任意两粒子纠缠态隐形传态模型最早是由Yang和Guo提出的<sup>[95]</sup>，该方案中包含实验上难以实现的Bell基测量。文献<sup>[146,148,149]</sup>提出利用腔-QED技术来间接实现Bell基测量，但文献只给出形如 $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ 或 $\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$ 隐形传态方案。

人们在设计了各种理论方案的同时，力求在实验上去实现。1997年12月，奥地利学者Zeilinger领导的实验小组在国际著名刊物《自然》上报道了世界上第一个实现量子隐形传态的实验结果<sup>[129]</sup>。紧接着，意大利的Rome小组于1998年初在《Phys.Rev. Lett.》上也报道了另一个成功的量子隐形传态实验结果<sup>[130]</sup>。1998年底，美国Caltec研究小组<sup>[131]</sup>利用运转于阈值以下的简并参量过程产生两束频率简并相位相干的正交相位压缩光，在50%的分束器上耦合产生一对连续变量的EPR纠缠光束，即EPR纠缠源，从而实现连续变量的量子隐形传态。同年年底，Nielsen等的核磁共振实验<sup>[132]</sup>，实现了核自旋量子态的隐形传送。2001年美国的Shih小组<sup>[133]</sup>、2002年意大利的Martini小组<sup>[134]</sup>分别用不同的方法实现量子隐形传态方案。中国科技大学的潘建伟小组<sup>[135]</sup>在2003年Nature上发表了一篇题为“自由量子态隐形传态”的论文。在过去的量子态隐形传输实验中，在确定传输量子态成功的同时，必须以破坏被传输的量子态为代价，这就使其不可能在量子通讯和量子计算中有进一步的应用。潘建伟教授及其同事在研究中发现，适当降低被传输量子态的亮度可在不破坏被传输态的条件下成功传输量子态。这一研究成果，与高精度的纠缠态纯化一起，可从根本上解决目前在远距离量子通讯中由“退相干效应”带来的困难，并将极大地推动可容错量子计算的实验研究。2004年1月，瑞士的De Riedmatten<sup>[136]</sup>等实现了通过光纤延量对Bell态测量的远距离量子隐形传态。同年，潘建伟小组<sup>[137]</sup>在实验上发展了多光子纠缠技术，利用已有的四光子纠缠技术结合新发展的单光子源技术，在世界上第一次实现了五光子纠缠。并在此基础上实现了新型的量子隐形传态——终端开放的隐形传态。实验结果在量子力学基础问题的检验、信息论、密

码学和量子计算等重要应用方向上,都具有显著的意义和价值。实验方法将大大促进未来网络化量子通信、线性光学量子计算、量子力学基础检验等重要科学问题的研究。

### 2.5.5 量子态远程态制备

量子信息是由微观粒子的量子态来表达的,量子信息的操控、存储和传输实际上就是对量子态的么正操作、量子态的存储和量子态的传递。量子隐形传态<sup>[88]</sup>和量子态远程态制备(remote state preparation, 简称RSP)是两种主要的量子信息传输方式。不同于隐形传态过程,在量子态远程态制备过程中,信息的发送者(Alice)不一定拥有要被发送的量子态,但她知道这个量子态的全部信息,她的目的是帮助远处的信息接收者(Bob)制备这个量子态,而这个量子态对Bob来说是未知的。

假设Alice手中有一个未知量子态 $a|0\rangle_q + b|1\rangle_q$ , Alice和Bob手中各有一个粒子A和B,且 $\frac{(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})}{\sqrt{2}}$ , 量子隐形传态可以分为两步来完成<sup>[156]</sup>:

第一步,实现信息共享。Alice对其拥有的两个粒子实施 $C_{NOT}$ 操作,并以纠缠态中的粒子A为控制位,以未知的量子比特q为把位,即,

$$\begin{aligned} |x\rangle_q |0\rangle_A &\rightarrow |x\rangle_q |0\rangle_A, \\ |x\rangle_q |1\rangle_A &\rightarrow |x \oplus 1\rangle_q |1\rangle_A. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

$\oplus$ 表示模2加,我们可以得到,

$$(a|0\rangle_q + b|1\rangle_q)(|00\rangle + |11\rangle)_{AB} \rightarrow |0\rangle_q(a|00\rangle + b|11\rangle)_{AB} + |1\rangle_q(b|00\rangle + a|11\rangle)_{AB}. \quad (2.5.4)$$

再对粒子q实施投影测量,并将结果通过经典信道通知Bob。如果测量结果为 $|0\rangle_q$ , Alice与Bob共享的量子态为 $a|00\rangle_{AB} + b|11\rangle_{AB}$ ;如果测量结果为 $|1\rangle_q$ ,则双方对各自粒子实施一个NOT操作(即 $\sigma_x$ 操作),仍可得到 $a|00\rangle_{AB} + b|11\rangle_{AB}$ ,此时,未知的量子信息由通信双方共享。

第二步,信息提取。为使未知量子态全部转移到Bob的粒子上,Alice对粒子A进行Hadamard变换,

$$a|00\rangle_{AB} + b|11\rangle_{AB} \xrightarrow{H} |0\rangle_A(a|0\rangle_B + b|1\rangle_B) + |1\rangle_A(a|0\rangle_B - b|1\rangle_B). \quad (2.5.5)$$

Alice对粒子A进行测量,并将结果告诉Bob。如果结果是 $|0\rangle_A$ ,则Bob获得目标态 $a|0\rangle_B + b|1\rangle_B$ ;如果测量结果是 $|1\rangle_A$ ,Bob需要实施 $\sigma_z$ 才能得到目标态。

很显然,在这一过程中,传输1个量子比特(1 qubit)的量子信息,共消耗了2比特的经典信息(2cbits)和1ebit(一个EPR对的纠缠度为1ebit<sup>[155]</sup>)的纠缠资源,即

$$1ebits + 2cbits \xrightarrow{\text{teleport}} 1qubit. \quad (2.5.6)$$

如果要传输 $n$  qubits 的量子信息,则需要传输 $2n$  cbits 的经典信息和 $n$  ebit 的纠缠(即 $n$  个EPR 对)。所以,量子信息传输伴随着经典信息的传输。在研究量子传输时,人们往往过多关注的是如何将量子信息安全准确地到达目的地,如何尽可能少得消耗量子纠缠,而忽略了这其中所消耗的经典信息,原因是经典信息相对来说较为“廉价”。实际上,在经典信息传递过程中,同样伴随着物理资源的消耗,任何一种资源都是有限的,经典信息也不例外。所以,在量子信息传输过程中,如何减少经典信息的消耗,是量子信息学领域中一个重要课题。

远程态制备与量子隐形传态的目的一样,都是希望把一个量子态传送到接收方Bob处,但在远程态制备中,Alice是知道待传送量子态的。假设要制备的量子态仍是 $a|0\rangle_q + b|1\rangle_q$ , Alice 与Bob 间要实现远程态制备,只需双方间共享一个两个量子位纠缠态作为量子通道,Alice根据她所知道的待传量子态信息,对她所拥有的量子位实施局域操作,使量子通道中的纠缠态变为 $a|00\rangle_{AB} + b|11\rangle_{AB}$ , 双方间的量子通讯过程可以直接从隐形传态的第二步开始。所以,和量子隐形传态相比,远程态制备所需要的资源要少些,远程制备一个qubit量子态,只需传输1 cbit的经典信息。这种思想最早是由Pati<sup>[3]</sup>提出的,后来,人们对远程态制备方案进行了各种推广,提出了多体量子态<sup>[157,163]</sup>、高维量子态<sup>[158,160]</sup>、混态量子态<sup>[161]</sup>的RSP方案,还有利用腔QED实现RSP方案<sup>[163,164]</sup>以及在实验上实现RSP方案<sup>[165-167]</sup>。

从以上的讨论我们可以看到,量子隐形传态及量子态远程制备是利用经典辅助的方法传送量子比特表示的信息,而量子安全直接通讯是用量子态传送给经典比特表示的信息,它们是量子通信中比较典型的两种方式。前者一定伴随着量子纠缠的损耗,而后者却不然。

## 2.6 量子计算

### 2.6.1 量子门

量子计算机线路是由连线和量子逻辑门构成的。连线用于在线路间传送信息,而量子逻辑门负责处理量子信息,对编码的量子态进行一系列的幺正变换,把信息从一种形式转换为另一种形式。下面介绍几种量子门。

#### 1、基本量子门

逻辑门的操作可以用对量子位的Hilbert空间基矢的作用定义,2-维Hilbert空间的基

矢记为

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.1)$$

则几个常用的一位门为

(1) 恒等变换

变换 $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ ,  $|1\rangle \rightarrow |1\rangle$ 属于恒等变换, 其变换算符表示为

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|. \quad (2.6.2)$$

(2) 非门 (Not gate)

表示基 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 互换, 即 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ ,  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ , 变换算符为

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \sigma_x. \quad (2.6.3)$$

(3) Z操作

表示 $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ ,  $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ 的变换, 矩阵表示为

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \sigma_z. \quad (2.6.4)$$

(4) Y操作

表示 $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ ,  $|0\rangle \rightarrow -|1\rangle$ 的变换, 矩阵表示为

$$Y = ZX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| = i\sigma_y. \quad (2.6.5)$$

这里的 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 是Pauli矩阵。

(5) 相位门 (Phase gate)

表示改变相位的量子门, 其变换算符为

$$U(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (2.6.6)$$

在相位门的作用下,量子态的变换规律为

$$U(\phi)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta e^{i\phi}|1\rangle. \quad (2.6.7)$$

$\alpha$ 和 $\beta$ 为任意复数。

### (6) Hadamard 门

Hadamard 门的矩阵表示为

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.8)$$

Hadamard 门的作用规律是

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (2.6.9)$$

它是量子比特特有的一种逻辑门,也是最常用的量子门之一。

## 2、受控量子门

### (1) 控制-U门 (Controlled U-gate)

这是作用在两个量子位上的操作,可定义如下:

$$|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U. \quad (2.6.10)$$

其中,  $I$ 是一个量子位的恒等操作,  $U$ 是另外一个一位门。第1个量子位称为控制位,第2量子位称为靶位。当且仅当第一个量子位处于态 $|1\rangle$ ,第2个量子位取 $U$ 操作,特别地,当 $U = X$ 为非门时,上述两位门被称做控制-非门 (Controlled Not-gate),它的作用是

$$\begin{cases} |00\rangle \rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle \rightarrow |01\rangle \\ |10\rangle \rightarrow |11\rangle \\ |11\rangle \rightarrow |10\rangle \end{cases} \quad (2.6.11)$$

如果两个量子位Hilbert空间基矢为

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.12)$$

在这组基矢下的控制-非门可以表示为

$$C_{Not} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6.13)$$

当 $U = U(\phi)$ 时, 上述控制- $U$ 门叫做控制-相位门, 其矩阵表示为

$$C_{U(\phi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (2.6.14)$$

当 $U = H$ 时的控制- $U$ 门叫做控制-Hadamard门, 它的作用是

$$\begin{cases} |00\rangle \rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle \rightarrow |01\rangle \\ |10\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle) \\ |11\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle) \end{cases} \quad (2.6.15)$$

其矩阵表示为

$$C_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.6.16)$$

## (2) Toffoli门

Toffoli门也叫做控制-控制-非门 (Controlled-controlled Not-gate, 是一种重要的三位量子门, 当且仅当第1、2量子位都处在 $|1\rangle$ 态时, 才对第3个量子位取非操作。Toffoli门的

作用是:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6.17)$$

### (3) Fredkin门

Fredkin门也叫做受控交换门 (Controlled Exchange gate), 它是一种3比特逻辑门。交换门是交换2比特态矢量的逻辑门, 它的作用是:

$$\begin{cases} |00\rangle \rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle \rightarrow |10\rangle \\ |10\rangle \rightarrow |01\rangle \\ |11\rangle \rightarrow |11\rangle \end{cases}. \quad (2.6.18)$$

交换门的矩阵表示为:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6.19)$$

受控交换门的作用是当且仅当第1个量子位取|1>时, 对第2、3量子位实施交换逻辑

门操作，它的矩阵表示为：

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6.20)$$

组合Toffoli门和Fredkin门，可以设计出半加法器和全加法器<sup>[4]</sup>。

## 2.6.2 量子并行计算

信息，归根结底是编码在物理系统中的东西，当承载信息的载体由经典比特过度到量子比特时，编码在物理系统中的态就从经典物理态过度到量子物理态。由于量子态具有根本不同与经典物理态的性质，所以量子比特具有经典比特所没有的特点，如，并行计算。

比特的集合叫做寄存器，如果寄存器中有 $n$ 个比特，叫做 $n$ 比特寄存器。通常， $n$ 比特经典寄存器的状态是由一个 $n$ 位二进制数来表示： $(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0)$ ，也可以由与之对应的十进数来表示，

$$a \equiv 2^{n-1}a_{n-1} + 2^{n-2}a_{n-2} + \cdots + 2^1a_1 + 2^0a_0. \quad (2.6.21)$$

$a$ 的取值从 $a = 0$ 到 $a = 2^n - 1$ ，共有 $2^n$ 个可能态。 $n$ 比特量子寄存器的最一般状态是由这 $2^n$ 个态的线性组合

$$|\psi\rangle = \sum_{a=0}^{2^n-1} C_a |a\rangle. \quad (2.6.22)$$

这是量子计算机能实现并行计算的根本原因所在，它可以把变量 $x$ 的某一函数 $f(x)$ 作为有效算法，可以同时处理多比特输入数据。作为函数 $f(x)$ 的简单例子，考虑单比特，

$$x \in \{0, 1\}, \quad f(x) \in \{0, 1\}. \quad (2.6.23)$$

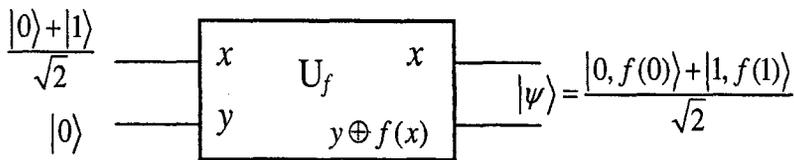


图 2.2 量子并行算

fig 2.2 Quantum parallel computation

假设我们有一个“量子黑盒”(quantum black box),它可以计算 $f(x)$ 。有两个寄存器:数据寄存器 $|x\rangle$ 和目标寄存器 $|y\rangle$ 。要求黑盒执行一个二量子比特的么正变换

$$U_f|x\rangle|y\rangle \longrightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle. \quad (2.6.24)$$

这里,  $y \oplus f(x)$ 表示模2(mod 2)逻辑和,运算过程如下:如图2.2所示,两个寄存器输入态经黑盒作用,输出态为

$$|\psi\rangle = U_f \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle). \quad (2.6.25)$$

由于并行计算,  $f(0)$ 和 $f(1)$ 的结果同时以线性组合的形式包括在输出态 $|\psi\rangle$ 中。于是我们可以看出对量子黑盒采用叠加形式的输入,只需运算量子黑盒一次,就可以得到经典输入运行黑盒两次的结果。这依赖于量子黑盒可以接收 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 叠加形式的输入。

如果是 $n$ 比特的数据寄存器,输入态为

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|00\dots0\rangle + |00\dots1\rangle + |11\dots1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle. \quad (2.6.26)$$

假设“量子黑盒”可以完成下面的计算:

$$U_f|x\rangle \longrightarrow f(x). \quad (2.6.27)$$

则可得输出态为

$$|\psi\rangle = U_f(|\psi'\rangle|0\rangle) = U_f \left( \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle|0\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle|f(x)\rangle. \quad (2.6.28)$$

通过 $U_f$ 的一次作用,就可以得到经典输入运行黑盒 $2^n$ 次的结果。

量子计算机对每一个叠加分量实现的变换相当于一种经典计算,所有这些经典计算同时完成,并按一定的概率振幅叠加起来,最终给出量子计算机的输出结果,以这种方式实现的信息处理叫量子并行处理。正是因为有这种并行计算能力,产生经典计算机无法比拟的计算能力。于是,制造出量子计算机就自然成为人们追求的目标。

### 2.6.3 量子计算机物理实现

量子信息的处理是由量子计算机来完成。量子计算机是一个量子力学系统，量子计算过程就是这个量子力学系统的量子态演化过程，可以归结为量子态制备，量子态演化及最后对量子态的测量。由于量子态具有干涉、纠缠、叠加等性质，使量子计算机有许多与经典计算机不同的特点。比如量子并行计算的能力便是来自于量子态的可叠加性。

量子计算机的基本单元是量子比特——两态系统，但用于量子计算的量子比特，必须是一个好量子比特，即能长久地处于某一个叠加态上。一个单核自旋可成为好的量子比特，因为与外磁场方向相同和相反态叠加态可以持续很长时间，甚至数天。但用核自旋建造量子计算机也是非常困难的，因为单个核自旋与外界的耦合非常弱，从而使测量他们的量子态也非常困难，不能很好进行数据输出。量子计算机必须很好的隔离，以免产生退相干现象，丢失部分信息，同时量子比特必须是可以造访，以便完成量子计算，并可以读出计算结果。一个真实的量子计算机必须达到这些限制之间的微妙平衡。下面介绍几个有希望成为量子信息处理系统的候选者及其存在的不足。

(1) 光子量子计算机。表示量子比特的实际物理系统是光子。光子是中性两态系统，没有强的相互作用，与大多数物质也没有强的相互作用。光子可以在光纤中长距离低损耗地传播，而且单光子的产生和测量相对简单。操纵光子态最方便的设备是镜子、移相器和分束器。镜子反射光子，改变光在空间的传播方向，损失率较小（在0.01%左右）。但不幸的是，大多数Kerr介质还是有很高的吸取率，从理论上估计最好的情况下，一个光子得到 $\pi$ 相移，必须有近50个光子被吸收，所以当光进入移相器和分束器后，会有较大的损失。这意味着用传统非线性光学器件建造量子计算机的前景并不乐观。

腔量子电动力学(C-QED)方法<sup>[37,38]</sup>为上述的光子量子计算机的困境提供了潜在的解决办法。C-QED涉及到原子与光腔场之间耦合的一个重要研究领域。把双能级原子注入具有很高Q值的共振微波腔中，原子与腔场之间耦合强度很高。C-QED技术能以不同的方式完成量子计算。其中的两种方式如下：量子信息可由光子态来表示，含有原子的共振腔提供光子间的相互作用，使信息在光子中通信；也可用原子表示信息，用光子在原子间进行通信。利用C-QED实现量子计算的关键步骤是光子与原子之间的耦合，因此，需要原子与腔场之间的耦合很强。以第一种方式为例，两个光子之间的耦合由一个原子来调剂，当原子离开共振腔时，光子间的耦合就变得困难了。

(2) 离子阱量子计算机<sup>[39,40]</sup>。该计算系统的主要元件是电磁阱、激光器、光探测器和离子，信息的载体是离子。通常是将一些原子电离成离子后，在高真空环境下，用精

心设计的电磁陷阱将其约束住。只要温度足够低,就可以“冻结”其它所的振动模自由度,只剩下质心振动模基态(零声子态)和一个激发态(1个声子态)。用激光束照射到一个离子,控制激光频率和脉冲持续时间,驱动离子内部态的跃迁,实现对单个量子位的转动变换。两个离子间的耦合是由声子来调剂的。离子阱量子计算机的主要优点是阱中的超冷离子处于一个几乎与外界隔绝的空间中,由环境引起的退相干很小。主要缺点是速度太慢,用数目极大的激光束脉冲操作各个离子执行逻辑运算时,运算速度难以提高,而且,声子的寿命又很短。此外,虽然,现在激光技术已经可以冷却少数离子到极低温度,但要把大量离子冷却在阱中也是很困难的事。

(3) 核磁共振(NMR)量子计算机<sup>[41]</sup>。将分子中的原子核的自旋作为量子比特,通过外加磁场的方法产生原子核磁共振以控制体系量子态演化。当把原子核放置在强静磁场中时,由于外磁场的作用,原子核的自旋朝着确定方向极化,并产生能级分裂。如果再加一个与静磁场垂直方向上振荡的较弱磁场,则那些与振荡磁场满足共振条件的核的自旋轴发生进动。自旋之间的耦合通过相邻原子间化学键来提供。据进动磁矩感应的电压信号来读取数据。因为核磁矩的微弱性,为了产生测量感应信号,需要使用大量分子(超过 $10^8$ ),在量子计算过程中用到了分子平衡性质,因此,抗干扰能强,退相干时间长,且实验可以在室温下进行。利用核磁共振已实现了7个量子位的计算机。这个方法的缺点是不能实现多量子位的计算,随着量子位的增多,合适分子的选择、量子位寻址、信号读取都是很困难的事情。

除此之外,还有很多种量子计算机的物理实现方案,比如硅基半导体量子计算机、超导Josephson量子计算机等。

尽管量子计算机的物理实现还存在着这样或那样的困难,但是,量子计算机超强的计算能力及数据存储能力,促使人们在理论及实验方面不断地进行探索。按照现在的发展速度,可以比较肯定地预计,在不远的将来,量子计算机一定会成为现实,虽然这中间还会有一段艰难而曲折的道路。

## 2.7 小结

本章首先介绍了包括量子位、量子态、量子纠缠等信息学的基本概念,阐述了量子通讯的主要内容及研究现状,介绍了量子计算中常用的几种逻辑门,并举例说明量子并行计算的基本原理,描述了目前文献中出现的几种典型量子计算机模型工作原理及各自的优缺点。

### 3 二能级原子与单模腔场相互作用制备纠缠态的基本理论

在量子信息科学中,信息的存储、表示、提取都离不开量子态和量子态的演化。量子纠缠态具有独特的量子关联特性,是各种各样量子态中比较重要的一类。纠缠是一种重要的信息资源,在量子信息科学中扮演着重要角色。纠缠态的制备是实现量子信息处理的前提和基础。到目前为止,人们提出了多种方法来制备纠缠态。例如:光子之间纠缠的实现<sup>[42-49]</sup>,离子阱产生纠缠态<sup>[50-54]</sup>,BEC(Bose-Einstein condensates)中纠缠态的产生<sup>[55-58]</sup>,量子点间纠缠的制备<sup>[59-61]</sup>,以及原子-腔相互作用实现原子之间、腔场之间或原子与腔场之间的纠缠<sup>[62-70]</sup>等。

腔量子电动力学——腔QED(cavity quantum electrodynamics),是原子分子物理与量子光学的交叉研究领域,它重点是研究量子光场与其中的原子之间相互作用规律。本章首先介绍腔QED的基本理论,然后,给出利用腔QED理论制备多原子对称W态和两种非对称类-W态的方案,最后,对这两种非对称类-W态的纠缠特性进行分析。

#### 3.1 J-C模型

Jaynes-Cummings模型<sup>[71]</sup>是量子光学中的一个最基本的模型,它描述了一个双能级原子与一个单模量子化光场的相互作用,是一个在电偶极及旋转波近似下精确可解的全量子化模型。按照通常的想法,一个处于激发态的原子进入真空腔中,没有电磁场存在,原子状态应没有什么变化,但实验证明:原子的布居数呈现Rabi振荡,J-C模型从理论上证明了Rabi振荡的存在。而腔QED方案的核心正是腔场和原子之间相互作用,所以,在腔QED中,原子与单模腔场组成的系统量子态演化可以用J-C模型来描述。

Jaynes-Cummings模型的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \omega a^\dagger a + g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+) \quad (\hbar = 1), \quad (3.1.1)$$

其中,  $\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$ ,  $\sigma_- = |0\rangle\langle 1|$ ,  $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ ;  $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 为原子的激发态与基态; $a^\dagger$ 、 $a$ 为腔场的产生与湮灭算符, $\omega_0$ 为原子跃迁频率; $\omega$ 为腔场频率; $g$ 为原子与腔场之间的耦合常数。我们可以将(3.1.1)式所表示的哈密顿量改写为

$$H = H_0 + H_I, \quad (3.1.2)$$

其中 $H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z + \omega a^\dagger a$ 是裸原子(与腔场之间没有相互作用的原子)与腔场无耦合情况下的能量算符; $H_I = g(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+)$ 是原子与光场相互作用能量算符,表示原子跃迁

时伴随发射和吸收光子的过程。则系统的时间演化算符为

$$U(t) = e^{-iH_0 t}. \quad (3.1.3)$$

由此可得, 在相互作用绘景下, 任意算符A表达式为

$$A^I = U^\dagger(t)AU(t). \quad (3.1.4)$$

如果A, B是Schrödinger 绘景下的两个任意算符,  $\alpha$  是任意常数, 利用如下关系式

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha[A, B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (3.1.5)$$

及

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (3.1.6)$$

可得,

$$a^I = U^\dagger(t)aU(t) = e^{i\omega a^\dagger t} a e^{-i\omega a^\dagger t} = a - i\omega t a + \frac{(-i\omega t)^2}{2!} a + \dots = a e^{-i\omega t}, \quad (3.1.7)$$

同理,

$$a^{\dagger(I)} = a^\dagger e^{i\omega t}, \quad \sigma_+^{(I)} = \sigma_+ e^{i\omega t}, \quad \sigma_-^{(I)} = \sigma_- e^{-i\omega t}. \quad (3.1.8)$$

则在相互作用绘景中, 哈密顿量表达式为

$$\begin{aligned} H_I^{(I)} &= g(a^{(I)}\sigma_+^{(I)} + a^{\dagger(I)}\sigma_-^{(I)}) \\ &= g(ae^{-i\omega t}e^{i\omega t}\sigma_+ + a^\dagger e^{i\omega t}e^{-i\omega t}\sigma_-) \\ &= g(a\sigma_+ e^{i\delta t} + a^\dagger\sigma_- e^{-i\delta t}). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

这里,  $\delta = \omega_0 - \omega$  为二能级原子跃迁频率与腔场频率的失谐量。在后面的叙述中, 为方便起见, 将相互作用绘景下的哈密顿量表示为,

$$H_I = g(a\sigma_+ e^{i\delta t} + a^\dagger\sigma_- e^{-i\delta t}). \quad (3.1.10)$$

### 3.2 单原子与共振的单模腔场相互作用制备纠缠态

如原子与腔场共振, 即 $\omega_0 = \omega$ , 由J-C模型, 相互作用哈密顿量为,

$$H_I = g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-). \quad (3.2.1)$$

下面分别讨论共振情况下, 原子与腔场之间及原子之间纠缠态的制备。

### 3.2.1 单原子与共振腔场之间纠缠态制备

将一个二能级原子送入单模腔场中,由(3.2.1)式可知,在相互作用绘景下,系统量子态的时间演化算符为,

$$U(t) = e^{-igt(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)}. \quad (3.2.2)$$

假设初时刻,原子处在激发态 $|1\rangle$ ,腔场处于真空态 $|0\rangle_c$ ,由于

$$(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)|1\rangle|0\rangle_c = |0\rangle|1\rangle_c, \quad (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)^2|1\rangle|0\rangle_c = |1\rangle|0\rangle_c, \quad (3.2.3)$$

所以,当原子进入腔场后,系统的量子态演化为,

$$\begin{aligned} |1\rangle|0\rangle_c &\longrightarrow U(t)|1\rangle|0\rangle_c = e^{-igt(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)}|1\rangle|0\rangle_c \\ &= \{1 + [-igt(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)] + \frac{1}{2!}[-igt(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)]^2 + \dots\}|1\rangle|0\rangle_c \\ &= [1 - \frac{(gt)^2}{2!} + \frac{(gt)^4}{4!} - \dots]|1\rangle|0\rangle_c - i[(gt) - \frac{(gt)^3}{3!} + \frac{(gt)^5}{5!} + \dots]|0\rangle|1\rangle_c \\ &= \cos(gt)|1\rangle|0\rangle_c - i\sin(gt)|0\rangle|1\rangle_c. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

取 $gt = \pi/4$ ,则当原子飞离腔场时,原子与腔场将处于最大纠缠态,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle_c - i|0\rangle|1\rangle_c). \quad (3.2.5)$$

### 3.2.2 共振作用制备两原子最大纠缠态

Cirac 和 Zoller<sup>[72]</sup>在1994年提出,利用腔-QED技术制备两原子的最大纠缠态。假设原子1和2分别处在激发态 $|1\rangle_1$ 和基态 $|0\rangle_2$ 上,与原子共振的单模腔场处于真空态 $|0\rangle_c$ 。先让原子1和原子2先后通过腔场,调整原子的运行速度,使得两原子与腔场相互作用时间 $t_1$ 、 $t_2$ 分别满足 $gt_1 = \pi/4$ , $gt_2 = \pi/2$ ,并考虑到当基态原子通过真空腔场时,原子和腔场都没有变化,即,

$$|0\rangle_c|0\rangle_2 \longrightarrow |0\rangle_c|0\rangle_2 \quad (3.2.6)$$

由(3.2.4)式可知系统量子态演化过程如下,

$$|1\rangle_1|0\rangle_c|0\rangle_2 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1|0\rangle_c - i|0\rangle_1|1\rangle_c)|0\rangle_2 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|1\rangle_2)|0\rangle_c. \quad (3.2.7)$$

这样便得到了两原子的最大纠缠态—EPR对,而腔场则回到了初始态,可以继续制备下一个EPR对,而不需要对腔进行处理。用这种方法制备两原子的最大纠缠态早在1997年就已在实验上成功实现<sup>[73]</sup>了。利用同样的方法还可以制备多原子的GHZ态和对称W态。

## 3.2.3 共振作用制备多原子纠缠态

为了制备 $n$ 个原子的GHZ态<sup>[74,75]</sup>, 让原子初态均为基态:  $|0_1 0_2 \cdots 0_n\rangle$ , 并将单模腔场制备在相干态上:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |n\rangle)_c$ . 依次将原子注入腔场中, 并调整相互作用时间满足:  $gt_j = \pi/2 (j = 1, 2, \cdots, n)$ , 由(3.2.4), 则系统的量子态演化过程如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |n\rangle)_c |0_1 0_2 \cdots 0_n\rangle &\xrightarrow{t_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle|0\rangle_c + i|1_1\rangle|n-1\rangle_c) |0_2 0_3 \cdots 0_n\rangle \\ &\xrightarrow{t_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2\rangle|0\rangle_c + |1_1 1_2\rangle|n-2\rangle_c) |0_3 \cdots 0_n\rangle \\ &\vdots \\ &\xrightarrow{t_n} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + |1_1 1_2 \cdots 1_n\rangle) |0\rangle_c, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

这里,  $n$ 为偶数。当原子全部飞离腔场时, 腔场将处于非相干的真空态, 而 $n$ 个原子被制备在GHZ态上。

下面介绍如果将多个两能级原子同时注入腔场中, 如何制备原子的纠缠态<sup>[76]</sup>, 我们以3个原子为例。由J-C模型, 3个原子与共振腔场相互作用哈密顿量为,

$$H_I = g \sum_{j=1}^3 (a\sigma_+^j + a^\dagger\sigma_-^j). \quad (3.2.9)$$

则系统量子态时间演化算符为,

$$U(t) = e^{-iH_I t} = e^{-ig \sum_{j=1}^3 (a\sigma_+^j + a^\dagger\sigma_-^j)t}. \quad (3.2.10)$$

假设初始时刻原子处于基态 $|000\rangle_{123}$ , 腔场处于激发态 $|1\rangle_c$ , 将 3 个原子同时注入腔场中, 在哈密顿量的作用下,  $t$ 时刻系统的量子态演化为,

$$\begin{aligned}
 |000\rangle_{123}|1\rangle_c &\longrightarrow U(t)|000\rangle_{123}|1\rangle_c \\
 &= |000\rangle_{123}|1\rangle_c \\
 &\quad + (-igt)(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)_{123}|0\rangle_c \\
 &\quad + 3\frac{(-igt)^2}{2!}|000\rangle_{123}|1\rangle_c \\
 &\quad + 3\frac{(-igt)^3}{3!}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)_{123}|0\rangle_c \\
 &\quad + 3^2\frac{(-igt)^4}{4!}|000\rangle_{123}|1\rangle_c \\
 &\quad + 3^2\frac{(-igt)^5}{5!}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)_{123}|0\rangle_c \\
 &\quad \vdots \\
 &= \cos(\sqrt{3}gt)|000\rangle_{123}|1\rangle_c - i\frac{\sin(\sqrt{3}gt)}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)_{123}|0\rangle_c.
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

显然, (3.2.11)式是纠缠态。如取 $\sqrt{3}gt = \frac{\pi}{2}$ , 则可得3原子的对称W态:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)_{123}. \tag{3.2.12}$$

本节讨论的原子与共振腔场相互作用制备纠缠态的方案中, 系统量子态的演化将受到腔场耗散的影响, 从而破坏量子计算机中存储的信息及量子通讯过程中传输的信息。所以这种方案制备纠缠态对腔的品质提出了很高的要求。而在大失谐条件下, 系统对腔的耗散不敏感, 从而降低了对腔品质的要求, 更易于量子信息的存储及传输。下面介绍大失谐作用的基本原理以及利用大失谐作用制备原子纠缠态<sup>[63,64,79-81]</sup>的方案。

### 3.3 大失谐作用制备两原子纠缠态

在二能级原子与腔场大失谐<sup>[77,78]</sup>条件下, 即 $\delta \gg 2g\sqrt{\bar{n}+1}$ (这里 $\bar{n}$ 为腔场的平均光子数), 原子系统与腔场之间没有能量交换, 所以, 系统量子态的演化并不受腔的耗散的影响, 大大提高了量子计算及量子通讯的精确性。但在不同情况下, 系统的相互作用有效哈密顿量及系统量子态的演化规律仍有些不同, 下面分别讨论。

## 3.3.1 不含经典场驱动的失谐作用制备原子纠缠态

如果将 $n$ 个二能级原子同时注入单模腔场中,则由J-C模型可得系统的哈密顿量为,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_0 \sigma_z + \omega_c a^\dagger a + \sum_{j=1}^n g(a^\dagger \sigma_-^j + a \sigma_+^j). \quad (3.3.1)$$

相互作用绘景下的系统哈密顿量表示为,

$$H_I = \sum_{j=1}^n g(a \sigma_+^j e^{i\delta t} + a^\dagger \sigma_-^j e^{-i\delta t}). \quad (3.3.2)$$

如果原子与腔场频率的失谐量 $\delta = \omega_0 - \omega_c \gg 2g\sqrt{n+1}$ ,则原子与腔场没有能量交换,如果第 $j$ 个原子与第 $k$ 个原子的初态为 $|10\rangle$ ,腔场的初态为 $|n\rangle$ ,则在大失谐作用下,系统将在 $|10n\rangle \leftrightarrow |01n\rangle$ 做Rabi振荡,中间态为 $|00n+1\rangle$ 和 $|11n-1\rangle$ ,由二级微扰理论,相应的Rabi振荡频率为,

$$\lambda = \frac{\langle 10n | H_I | 00n+1 \rangle \langle 00n+1 | H_I | 01n \rangle}{\delta} + \frac{\langle 10n | H_I | 11n-1 \rangle \langle 11n-1 | H_I | 01n \rangle}{-\delta} = \frac{g^2}{\delta}. \quad (3.3.3)$$

在大失谐条件下,由原子与腔场作用引起的原子激发态的斯塔克位移(Stark shift)为,

$$\frac{|\langle 1n | H_I | 0n+1 \rangle|^2}{\delta} = \frac{g^2(n+1)}{\delta}, \quad (3.3.4)$$

同理可得,原子基态的斯塔克位移为,

$$\frac{|\langle 0n | H_I | 1n-1 \rangle|^2}{\delta} = -\frac{g^2 n}{\delta}. \quad (3.3.5)$$

由此可得,系统相互作用有效的哈密顿量为,

$$H_e = \lambda \left[ \sum_{j=1}^n (|1\rangle_j \langle 1| a a^\dagger - |0\rangle_j \langle 0| a^\dagger a) + \sum_{j,k=1}^n (\sigma_+^j \sigma_-^k + \sigma_-^j \sigma_+^k) \right], \quad j \neq k. \quad (3.3.6)$$

这里, $\lambda = g^2/\delta$ .第一、二项表示与光子数有关的斯塔克位移,第三、四项表示与光数无关的由腔模引起的两原子之间耦合.如果腔场的初态为真空态,有效哈密顿量可以进一步表示为,

$$H_e = \lambda \left[ \sum_{j=1}^n (|1\rangle_j \langle 1| + \sum_{j,k=1}^n (\sigma_+^j \sigma_-^k + \sigma_-^j \sigma_+^k) \right], \quad j \neq k. \quad (3.3.7)$$

由上式可知, 当腔场初态为真空态时, 系统的演化与腔泄漏无关。下面考虑  $N = 2$  的情形, 此时有效哈密顿量可以表示为,

$$H_e = H_e^0 + H_e^I, \quad (3.3.8)$$

其中,

$$H_e^0 = \lambda \sum_{j=1}^2 |1\rangle_j \langle 1|, \quad (3.3.9)$$

$$H_e^I = \lambda(\sigma_-^1 \sigma_+^2 + \sigma_+^1 \sigma_-^2). \quad (3.3.10)$$

由于,  $H_e^0$  与  $H_e^I$  对易, 即

$$[H_e^0, H_e^I] = 0. \quad (3.3.11)$$

系统的时间演化算符可以表示为,

$$U(t) = e^{-iH_e^0 t} e^{-iH_e^I t}. \quad (3.3.12)$$

如果不考虑相因子, 两原子在腔场作用下, 其量子态按如下规律演化,

$$|1_1 0_2\rangle \rightarrow (\cos \lambda t |1_1 0_2\rangle - i \sin \lambda t |0_1 1_2\rangle), \quad (3.3.13a)$$

$$|0_1 1_2\rangle \rightarrow (\cos \lambda t |0_1 1_2\rangle - i \sin \lambda t |1_1 0_2\rangle), \quad (3.3.13b)$$

$$|0_1 0_2\rangle \rightarrow |0_1 0_2\rangle. \quad (3.3.13c)$$

$$|1_1 1_2\rangle \rightarrow |1_1 1_2\rangle. \quad (3.3.13d)$$

所以, 两原子由纠缠的初态  $|1_1 0_2\rangle$  或  $|0_1 1_2\rangle$ , 经过腔场失谐作用演化为纠缠态。

Guo<sup>86</sup>提出了在大失谐条件下, 制备多原子  $n > 2$  纠缠态的方法。假设有  $n + 1$  个原子初态为  $|1_1 0_2 \cdots 0_{n+1}\rangle$ , 将这  $n + 1$  个原子同时注入初态为真空态的单模腔场中, 如果腔场与原子大失谐, 则原子系统的量子态将演化为,

$$|1_1 0_2 \cdots 0_{n+1}\rangle \longrightarrow \frac{e^{-i(n+1)\lambda t} + n}{n+1} |0\rangle_{1,2,\dots,n} |1\rangle_{n+1} + \frac{e^{-i(n+1)\lambda t} - 1}{n+1} |n-1, 1\rangle_{1,2,\dots,n} |0\rangle_{n+1}, \quad (3.3.14)$$

这是一个  $n$  个原子的纠缠态, 其中,

$$|n-1, 1\rangle_{1,2,\dots,n} = |0\rangle_{1,2,\dots,n-1} |1\rangle_n + |0\rangle_{1,2,\dots,n-2} |1\rangle_{n-1} |0\rangle_n + \cdots + |1\rangle_1 |0\rangle_{2,3,\dots,n-1} \quad (3.3.15)$$

由此可见, 经过腔场大失谐作用, 可以使原子由非纠缠态演化为纠缠态, 而且, 这一过程与腔场光子数无关, 所以与腔泄漏无关; 这种失谐作用对 $|00\dots 0\rangle$ 没有影响, 对 $|11\dots 1\rangle$ 只改变其相因子。如果腔场的初态不是真空态, 由式(3.3.4)式及(3.3.5)式可知, 原子量子态的斯塔克位移与腔场光子数有关, 两原子 $|00\rangle$ 和 $|11\rangle$ 演化相因子将受到腔场的质量及热场的影响。如果腔场在与原子作用同时还受一个很强的经典场驱动, 即可解决这一问题。

### 3.3.2 经典场驱动下的失谐作用制备原子纠缠态

设 $N$ 个两能级原子同时与一个失谐的单模腔场相互作用, 并且腔场还受一个很强的经典的电场驱动, 则原子与腔场构成系统的哈密顿量为,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \omega_0 \sigma_z + \omega_c a^\dagger a + \sum_{j=1}^N \left[ g(a^\dagger \sigma_-^j + a \sigma_+^j) + \Omega(\sigma_+^j e^{-i\omega t} + \sigma_-^j e^{i\omega t}) \right]. \quad (3.3.16)$$

这里,  $\omega$ 和 $\Omega$ 分别是经典场的频率及Rabi振荡频率,  $\omega_c$ 为腔场频率。假设 $\omega_0 = \omega$ , 则相互作用绘景下的哈密顿量可以表示为

$$H_I = \sum_{j=1}^N \left[ g(a \sigma_+^j e^{i\delta t} + a^\dagger \sigma_-^j e^{-i\delta t}) + \Omega(\sigma_+^j + \sigma_-^j) \right]. \quad (3.3.17)$$

下面我们给出一种与Zheng<sup>[80,81]</sup>略有不同的哈密顿量处理方法。首先, 将上式改写为

$$H_I = \sum_{j=1}^N \left[ g(a \sigma_+^j e^{i\delta t} + a^\dagger \sigma_-^j e^{-i\delta t}) \right] + \sum_{j=1}^N \Omega \sigma_x^j, \quad (3.3.18)$$

其中 $\sigma_x^j = \sigma_+^j + \sigma_-^j = |0\rangle_j \langle 1| + |1\rangle_j \langle 0|$ 是Pauli矩阵。令

$$H_I' = \sum_{j=1}^N \left[ g(a \sigma_+^j e^{i\delta t} + a^\dagger \sigma_-^j e^{-i\delta t}) \right], \quad H_0' = \sum_{j=1}^N \Omega \sigma_x^j. \quad (3.3.19)$$

则在相互作用绘景下的相互作用哈密顿量可进一步写成如下形式,

$$\begin{aligned} H_I'' &= e^{iH_0't} H_I' e^{-iH_0't} \\ &= e^{i \sum_{j=1}^N \Omega \sigma_x^j} \left[ \sum_{j=1}^N g(a \sigma_+^j e^{i\delta t} + a^\dagger \sigma_-^j e^{-i\delta t}) \right] e^{-i \sum_{j=1}^N \Omega \sigma_x^j} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

由于Pauli矩阵 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 满足如下的关系,

$$[\sigma_x, \sigma_\pm] = \pm \sigma_z, \quad [\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_x, \sigma_z] = -2i\sigma_y, \quad i\sigma_y = \sigma_- - \sigma_+. \quad (3.3.21)$$

因此,

$$\begin{aligned}
H_I'' &= \sum_{j=1}^N \left\{ g(a\sigma_+^j e^{i\delta t} + a^\dagger \sigma_-^j e^{-i\delta t}) + i\Omega t g(-e^{-i\delta t} a^\dagger + e^{i\delta t} a) \sigma_z^j \right. \\
&\quad + \frac{(i\Omega t)^2}{2!} g(-e^{-i\delta t} a^\dagger + e^{i\delta t} a) (-2i\sigma_y^j) + \frac{(i\Omega t)^3}{3!} g(-e^{-i\delta t} a^\dagger + e^{i\delta t} a) (-2i)(2i) \sigma_z^j \\
&\quad \left. + \frac{(i\Omega t)^4}{4!} g(-e^{-i\delta t} a^\dagger + e^{i\delta t} a) (-2i)(2i)(-2i\sigma_y^j) + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N g e^{-i\delta t} a^\dagger \left\{ \sigma_-^j + \sigma_-^j \left[ 1 - \frac{(2\Omega t)^2}{2!} + \frac{(2\Omega t)^4}{4!} + \dots \right] \right. \\
&\quad + \sigma_+^j - \sigma_+^j \left[ 1 - \frac{(2\Omega t)^2}{2!} + \frac{(2\Omega t)^4}{4!} + \dots \right] \\
&\quad \left. - i\sigma_z^j \left[ (2\Omega t) - \frac{(2\Omega t)^3}{3!} + \frac{(2\Omega t)^5}{5!} + \dots \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N g e^{i\delta t} a \left\{ \sigma_+^j + \sigma_+^j \left[ 1 - \frac{(2\Omega t)^2}{2!} + \frac{(2\Omega t)^4}{4!} + \dots \right] \right. \\
&\quad + \sigma_-^j - \sigma_-^j \left[ 1 - \frac{(2\Omega t)^2}{2!} + \frac{(2\Omega t)^4}{4!} + \dots \right] \\
&\quad \left. + i\sigma_z^j \left[ (2\Omega t) - \frac{(2\Omega t)^3}{3!} + \frac{(2\Omega t)^5}{5!} + \dots \right] \right\} \\
&= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{g}{2} e^{-i\delta t} a^\dagger \left[ (\sigma_-^j + \sigma_+^j) + (\sigma_-^j - \sigma_+^j) \cos(2\Omega t) - i\sigma_z^j \sin(2\Omega t) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{g}{2} e^{i\delta t} a \left[ (\sigma_-^j + \sigma_+^j) + (\sigma_+^j - \sigma_-^j) \cos(2\Omega t) + i\sigma_z^j \sin(2\Omega t) \right] \right\}. \tag{3.3.22}
\end{aligned}$$

如果经典场很强, 即  $2\Omega \gg \frac{g}{2}, \delta$ , 可以略去与  $\Omega$  有关的快速振荡项, 于是, 原子与腔场相互作用哈密顿量可以简化为,

$$H_I'' = \frac{g}{2} \sum_{j=1}^N (e^{-i\delta t} a^\dagger + e^{i\delta t} a) (\sigma_+^j + \sigma_-^j). \tag{3.3.23}$$

在大失谐的条件下, 即  $\delta \gg g/2$ , 由(3.3.23) 式可知, 系统将在  $|1_j 0_k n\rangle \leftrightarrow |0_j 1_k n\rangle$  之间及  $|1_j 1_k n\rangle \leftrightarrow |0_j 0_k n\rangle$  之间产生共振跃迁。其中,  $|1_j 0_k n\rangle \leftrightarrow |0_j 1_k n\rangle$  跃迁的中间非稳定态为  $|0_j 0_k n \pm 1\rangle$  及  $|1_j 1_k n \pm 1\rangle$ , 据微扰理论, 系统的Rabi振荡频率及原子量态的Stark 位移

分别为<sup>81</sup>:  $\frac{g^2}{2\delta}$  和  $\frac{g^2}{4\delta}$ , 则系统相互作用有效哈密顿量可以写成,

$$\begin{aligned} H_e &= \lambda \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (|1\rangle_j \langle 1| + |0\rangle_j \langle 0|) + \sum_{j,k=1}^N (\sigma_+^j \sigma_+^k + \sigma_+^j \sigma_-^k + \sigma_-^j \sigma_+^k + \sigma_-^j \sigma_-^k) \right] \\ &= \lambda \left[ \frac{N}{2} + \sum_{j,k=1}^N (\sigma_x^j \sigma_x^k) \right] \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

其中  $\lambda = g^2/2\delta$ ,  $\sigma_x = \sigma_- + \sigma_+$ . 由于有强经典场的驱动, 使有效的哈密量与腔场的量子态无关, 进而使原子与腔场之间的相互作用不受腔泄漏及环境热场的影响. 当  $N = 2$  时,

$$H_e = \lambda [1 + (\sigma_x^1 \sigma_x^2)] \quad H'_0 = \Omega(\sigma_x^1 + \sigma_x^2). \quad (3.3.25)$$

则双原子系统的时间演化算符为

$$U(t) = e^{-iH'_0 t} e^{-iH_e t} = e^{-i\lambda t} e^{-i\Omega \sigma_x^1 t} e^{-i\Omega \sigma_x^2 t} e^{-i\lambda \sigma_x^1 \sigma_x^2 t}. \quad (3.3.26)$$

定义二能级原子的另外两个基矢

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (3.3.27)$$

它们是算符  $\sigma_x$  的本征态, 即

$$\sigma_x |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle. \quad (3.3.28)$$

则原子的基态和激发态用  $|\pm\rangle$  展开为

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle). \quad (3.3.29)$$

如果两原子的初态为  $|0\rangle_1 |0\rangle_2$ , 进入腔场后, 量子态演化为,

$$\begin{aligned} |0\rangle_1 |0\rangle_2 &\rightarrow U(t) |0\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\lambda t} \left( e^{-i\lambda t} e^{-i\Omega t} e^{-i\Omega t} |+\rangle_1 |+\rangle_2 + e^{-i\lambda t} e^{i\Omega t} e^{i\Omega t} |-\rangle_1 |-\rangle_2 \right. \\ &\quad \left. + e^{i\lambda t} e^{-i\Omega t} e^{i\Omega t} |+\rangle_1 |-\rangle_2 + e^{i\lambda t} e^{i\Omega t} e^{-i\Omega t} |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right). \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

将 $|\pm\rangle$ 代入, 并整理得,

$$\begin{aligned} |0\rangle_1|0\rangle_2 \rightarrow e^{-i\lambda t} [\cos \lambda t (\cos \Omega t |0\rangle_1 - i \sin \Omega t |1\rangle_1) (\cos \Omega t |0\rangle_2 - i \sin \Omega t |1\rangle_2) \\ - i \sin \lambda t (\cos \Omega t |1\rangle_1 - i \sin \Omega t |0\rangle_1) (\cos \Omega t |1\rangle_2 - i \sin \Omega t |0\rangle_2)] \end{aligned} \quad (3.3.31a)$$

$$\begin{aligned} |1\rangle_1|1\rangle_2 \rightarrow e^{-i\lambda t} [\cos \lambda t (\cos \Omega t |1\rangle_1 - i \sin \Omega t |0\rangle_1) (\cos \Omega t |1\rangle_2 - i \sin \Omega t |0\rangle_2) \\ - i \sin \lambda t (\cos \Omega t |0\rangle_1 - i \sin \Omega t |1\rangle_1) (\cos \Omega t |0\rangle_2 - i \sin \Omega t |1\rangle_2)], \end{aligned} \quad (3.3.31b)$$

$$\begin{aligned} |1\rangle_1|0\rangle_2 \rightarrow e^{-i\lambda t} [\cos \lambda t (\cos \Omega t |1\rangle_1 - i \sin \Omega t |0\rangle_1) (\cos \Omega t |0\rangle_2 - i \sin \Omega t |1\rangle_2) \\ - i \sin \lambda t (\cos \Omega t |0\rangle_1 - i \sin \Omega t |1\rangle_1) (\cos \Omega t |1\rangle_2 - i \sin \Omega t |0\rangle_2)], \end{aligned} \quad (3.3.31c)$$

$$\begin{aligned} |0\rangle_1|1\rangle_2 \rightarrow e^{-i\lambda t} [\cos \lambda t (\cos \Omega t |0\rangle_1 - i \sin \Omega t |1\rangle_1) (\cos \Omega t |1\rangle_2 - i \sin \Omega t |0\rangle_2) \\ - i \sin \lambda t (\cos \Omega t |1\rangle_1 - i \sin \Omega t |0\rangle_1) (\cos \Omega t |0\rangle_2 - i \sin \Omega t |1\rangle_2)]. \end{aligned} \quad (3.3.31d)$$

调整相互作用时间 $t$  和经典场的Rabi频率, 使其满足 $\lambda t = \pi/4$  和 $\Omega t = \pi$ , 即可得到任何一个EPR对,

$$|0\rangle_1|0\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 - i|1\rangle_1|1\rangle_2) \quad (3.3.32a)$$

$$|1\rangle_1|1\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1|1\rangle_2 - i|0\rangle_1|0\rangle_2) \quad (3.3.32b)$$

$$|1\rangle_1|0\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1|0\rangle_2 - i|0\rangle_1|1\rangle_2) \quad (3.3.32c)$$

$$|0\rangle_1|1\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 - i|1\rangle_1|0\rangle_2). \quad (3.3.32d)$$

下面我们据以上结论提出多粒子W态及类W态的制备方案。

### 3.4 对称W态及非对称类-W态的制备

Dür等人<sup>[82]</sup>证明了三个qubit系统存在两种不等价的纠缠形式—GHZ态<sup>[83]</sup>和W态<sup>[82]</sup>。

$$|\psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|111\rangle + |000\rangle) \quad (3.4.1)$$

$$|\psi_W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |001\rangle). \quad (3.4.2)$$

由于W态具有抗退相干性, 即对系统中一个粒子求迹, 则余下两粒子仍处于纠缠态。基于这种特性, Shi等<sup>[84,85]</sup>提出利用三粒子W态作为量子信道进行量子通讯。下面我们据以上结论提出多粒子对称W态及非对称类-W态的制备方案。

## 3.4.1 对称W态的制备

Dür<sup>82</sup>将对称W态(简称W态)定义为,

$$|W_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}|n-1, 1\rangle, \quad (3.4.3)$$

这里 $|n-1, 1\rangle$ 表示有 $n-1$ 个原子处于基态、1个原子处激发态,是一个完全对称的态。例如,当 $n=3$ 时,

$$|W_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \quad (3.4.4)$$

在原子与腔场共振情况下,由(3.2.11)式,如果取相互作用时间满足 $\sqrt{3}gt = \pi/2$ ,则3个原子处于(3.4.4)式所表示的对称W态,成功概率为1.0,但这一过程受腔泄漏及热场的影响。Guo<sup>86</sup>提出了在大失谐条件下,制备多原子的对称W态的方法。在大失谐的条件下, $n+1$ 个原子的量子态演化为(3.3.14)式,然后对第 $n+1$ 个原子进行测量,如果测量结果为 $|0\rangle$ ,则其余 $n$ 个原子将处于如(3.4.3)式所表示的对称W态,然而,用这种方法制备W态的成功概率为 $|\frac{\sqrt{n}}{n+1}(e^{-i(n+1)t} - 1)|^2$ 。下面我们给出另外一种在大失谐条件下制备对称W态的方法。

假设 $n$ 个二能级原子的初态为 $|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle$ ,有 $(n-1)$ 个全同的单模腔场均处于真空态,且腔场频率与原子频率是大失谐。如图3.1所示, $n$ 个原子以相同的初速度开始运动,然后陆续进入腔场,当第 $j$ 个原子飞离第 $j$ 腔场后,让原子进入一个微波场 $M_j$ 。微波场 $M_j$ 可以使得原子态 $|0\rangle_j$ 变换到 $i|0\rangle_j$ ,而 $|1\rangle_j$ 态保持不变。

首先1、2原子通过第1个单模腔场,调整原子的速度,使其与场相互作用时间满足 $\lambda t_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,当两原子飞离第1个腔场瞬间,由(3.3.13)式可知,原子系统的量子态已经演化为,

$$|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle \rightarrow \left( \sqrt{\frac{1}{n}}|1_1 0_2\rangle - i\sqrt{\frac{n-1}{n}}|0_1 1_2\rangle \right) |0_3 0_4 \cdots 0_n\rangle \quad (3.4.5)$$

接着原子1进入第1个微波场,原子2、3进入第2个腔场,取相互作用时间满足 $\lambda t_2 = \arccos \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ ,当原子2、3飞离第2个腔场时,原子1已离开第1个微波场,此时原子系统的量子态为,

$$|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle \rightarrow \left[ \sqrt{\frac{1}{n}}|1_1 0_2 0_3\rangle + |0_1\rangle \sqrt{\frac{n-1}{n}} \left( \sqrt{\frac{1}{n-1}}|1_2 0_3\rangle - i\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}|0_2 1_3\rangle \right) \right] |0_4 0_5 \cdots 0_n\rangle \quad (3.4.6)$$

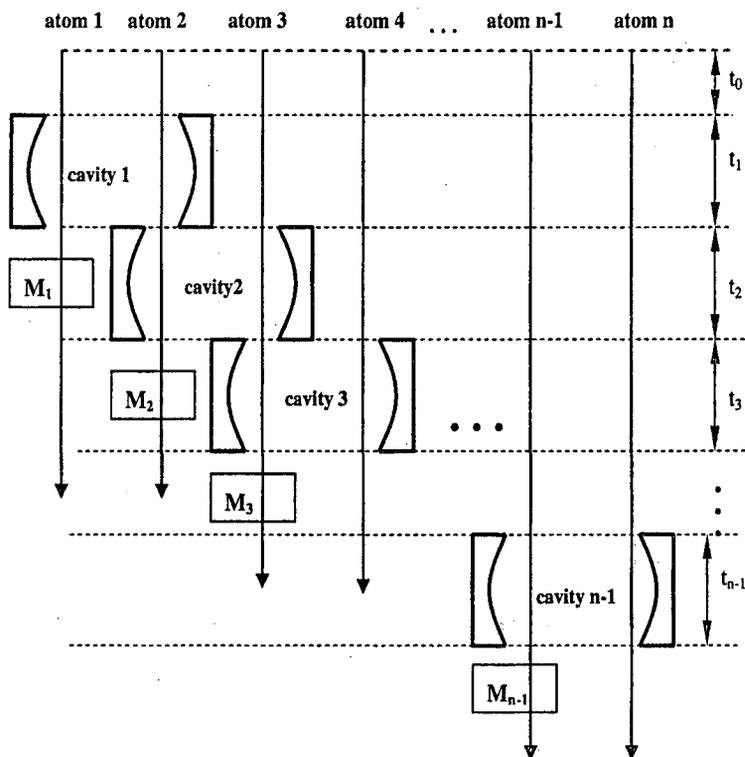


图 3.1  $n$  个原子与  $n$  个单模腔场相互作用示意图。 $t_j$  表示原子与第  $j$  个腔场相互作用时间；箭头表示原子的运动方向。

Fig. 3.1 Schematic diagram of the interaction between the  $n$  atoms and the  $n$  cavities.  $t_j$  denotes the interacting time between atoms and the  $j$ th cavity field and the arrows show the direction of atomic motion.

以此类推，当第  $j$  ( $j = 3, 4, \dots, n - 1$ ) 原子与第  $j + 1$  原子进入第  $j$  个腔场时，第  $j - 1$  原子进入第  $j - 1$  个微波场，取相互作用时间为  $\lambda t_j = \arccos \frac{1}{\sqrt{n-j+1}}$ ，直至第  $n - 1$  个原子离开最后一个微波腔时，原子系统的量子态经一系列的演化，最后变为对称的  $W$  态，即

$$|W_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} (|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + |0_1 1_2 0_3 \cdots 0_n\rangle + \cdots + |0_1 \cdots 0_{n-1} 1_n\rangle) = \frac{1}{\sqrt{n}} |n - 1, 1\rangle \quad (3.4.7)$$

利用这种对称的  $W$  态进行量子通讯，只能实现量子信息的概率传输，下面介绍两种能实现确定量子信息传输的非对称类- $W$  态制备方法。

### 3.4.2 两种非对称类-W态的制备

先介绍第一种非对称类-W态的制备。如果 $n$ 个原子初态为 $|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle$ , 先将原子1、2同时注入大失谐腔场中, 并取相互时间满足 $\lambda t = \pi/4$ , 由(3.3.13)式可得,

$$|1_1 0_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_1 0_2\rangle - i|0_1 1_2\rangle), \quad (3.4.8)$$

让原子1进入微波腔中进行演化:  $|0\rangle \rightarrow i|0\rangle$ , 当原子1离开微波腔时,

$$|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_1 0_2\rangle + |0_1 1_2\rangle) |0_3 0_4 \cdots 0_n\rangle. \quad (3.4.9)$$

再让除原子1以外的其它原子相继与腔场相互作用, 作用方式与在3.4.1节讨论相同, 则当第 $n-1$ 个原子从微波腔中飞出时, 原子系统的量子态为,

$$\begin{aligned} |1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle \rightarrow |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + \frac{1}{\sqrt{n-1}} |0_1\rangle (|1_2 0_3 \cdots 0_n\rangle \right. \\ &\quad \left. + |0_2 1_3 \cdots 0_n\rangle + \cdots + |0_2 0_3 \cdots 1_n\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + \frac{1}{\sqrt{n-1}} |0\rangle_1 |n-2, 1\rangle_{23 \cdots n} \right). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

这里, 我们称(3.4.10)式为第一种非对称类-W态。

下面我们介绍另外一种非对称类-W态的制备。

我们仍假设 $n$ 个原子初态为 $|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle$ , 如图3.1所示, 逐次让第 $j$  ( $j = 1, 2, \cdots, n-1$ )个原子和第 $j+1$ 个原子注入大失谐的单模腔场中, 取相互作用时间为 $\lambda t_j = \pi/4$ , 原子 $j$ 从腔场出来后进入微波腔 $M_j$ 进行 $|0\rangle_j \rightarrow i|0\rangle_j$ 变换, 当第 $n-1$ 个原子从微波腔中出来后, 原子系统的量子态演化为,

$$\begin{aligned} |1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle \rightarrow |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |10 \cdots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |010 \cdots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |010 \cdots 0\rangle + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2^k}} |0 \cdots 010 \cdots 0\rangle + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^{n-2}}} |00 \cdots 00\rangle (|10\rangle + |01\rangle) \right]_{12 \cdots n}. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

我们称(3.4.11)式为第二种非对称类-W态。

### 3.4.3 两种非对称类-W态的纠缠特性

纠缠在量子信息领域有着举足轻重的地位, 纠缠态做为通信双方之间的量子通道, 纠缠度决定了通讯过程的成功概率。下面我们对前面提出的两种非对称态粒子间的部分熵纠缠度进行简单分析。

(1) 第一种非对称类-W态部分熵纠缠度

为叙述方便, 假设我们在粒子序列 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中任取一个粒子 $k$ 作为一个子系, 则其余 $n-1$ 个粒子叫做粒子 $k$ 的对偶子系。首先分析一下粒子1与其对偶子系间的纠缠度, 将(3.4.10)式改写成下面的形式,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1|\varphi\rangle_{2,3,\dots,n} + |0\rangle_1|\chi\rangle_{2,3,\dots,n}) \quad (3.4.12)$$

式中,

$$|\varphi\rangle = |00\dots 0\rangle \quad (3.4.13a)$$

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n-1}}(|10\dots 0\rangle + |010\dots 0\rangle + \dots + |00\dots 01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{n-1}}|n-2, 1\rangle, \quad (3.4.13b)$$

是对偶子系的两个正交态。粒子1的约化密度矩阵为,

$$\rho_1 = \text{tr}_{2,3,\dots,n}|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}|0\rangle_1\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle_1\langle 1|. \quad (3.4.14)$$

很显然, 粒子1与其对偶子系间的纠缠度 (Von Neumann熵) 为,

$$E = S(\rho_1) = -\text{tr}\rho_1 \log_2 \rho_1 = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = 1. \quad (3.4.15)$$

所以, 粒子1与其对偶子系间的纠缠是最大纠缠。

接下来分析粒子 $k(k \neq 1)$ 与对偶子系间的纠缠。将(3.4.10)式改写成两子系间纠缠态的形式,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{(n-1)}} |1\rangle_k |\varphi\rangle_{12\dots k-1k+1\dots n} + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_k |\chi\rangle_{12\dots k-1k+1\dots n}. \quad (3.4.16)$$

式中,

$$|\varphi\rangle = |00\dots 00\rangle, \quad (3.4.17a)$$

$$|\chi\rangle = (|10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{n-1}}|0\rangle|n-3, 1\rangle), \quad (3.4.17b)$$

是两个正交态。

粒子 $k$ 的约化密度矩阵为,

$$\begin{aligned} \rho_k &= \text{tr}_{12\dots k-1k+1\dots n}|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2(n-1)}|1\rangle_k\langle 1| + \left(\frac{1}{2} + \frac{n-2}{2(n-1)}\right)|0\rangle_k\langle 0| \\ &= \frac{1}{2(n-1)}|1\rangle_k\langle 1| + \frac{2n-3}{2(n-1)}|0\rangle_k\langle 0|. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

于是可得, 粒子 $k$ 与其对偶子系统间的纠缠度为,

$$E = S(\rho_k) = \text{tr} \rho_k \log_2 \rho_k = -\frac{1}{2(n-1)} \log_2 \frac{1}{2(n-1)} - \frac{2n-3}{2(n-1)} \log_2 \frac{2n-3}{2(n-1)} \quad (3.4.19)$$

由(3.4.15)式和(3.4.19)式, 我们可得出以下结论: 在第一种类-W态中, (1) 粒子1与它的对偶子系统之间的纠缠总是最大纠缠, 与粒子数无关; (2) 由于我们讨论的是类-W态, 所以粒子数 $n \geq 3$ , 而当 $n$ 不等于2时, 表达式(3.4.15)的值是恒小于1的, 即粒子 $k$  ( $k \neq 1$ )与其对偶子系统之间的纠缠是非最大纠缠, 纠缠度随着粒子数 $n$ 的增大而减小(见图3.2(a)). (3) 当粒子数 $n$ 一定时, 第 $k$  ( $k \neq 1$ )个粒子与它的对偶子系统间的纠缠度与 $k$ 无关。也就是说, 粒子1以外的粒子是等价的。

(2) 第二种非对称类-W态部分熵纠缠度

先将(3.4.11)式改写成下面的形式,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2})^k} |1\rangle_k |\varphi\rangle_{12\dots k-1k+1\dots n} + |0\rangle_k (|\chi'\rangle_{12\dots k-1} |\varphi\rangle_{k+1k+2\dots n} + |0\rangle_k |\varphi\rangle_{12\dots k-1} |\chi\rangle_{k+1k+2\dots n}). \quad (3.4.20)$$

其中,

$$|\varphi\rangle_{12\dots k-1} = |00\dots 0\rangle \quad (3.4.21a)$$

$$|\varphi\rangle_{k+1k+2\dots n} = |00\dots 0\rangle \quad (3.4.21b)$$

$$|\chi'\rangle_{12\dots k-1} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |010\dots 0\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{k-2}}} |00\dots 010\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}} |0\dots 01\rangle \right) \quad (3.4.21c)$$

$$|\chi\rangle_{k+1k+2\dots n} = \frac{1}{(\sqrt{2})^k} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |010\dots 0\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{n-k-1}}} |0\dots 0\rangle (|10\rangle + |01\rangle) \right]. \quad (3.4.21d)$$

粒子 $k$ 的密度矩阵为,

$$\begin{aligned} \rho_k &= \text{tr}_{12\dots k-1k+1\dots n} |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2^k} |1\rangle_k \langle 1| + \sum_{j \neq k} \frac{1}{2^j} |0\rangle_k \langle 0| \\ &= \frac{1}{2^k} |1\rangle_k \langle 1| + \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) |0\rangle_k \langle 0|. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

对应的Von Neumann 熵为,

$$E = S(\rho_k) = \text{tr} \rho_k \log_2 \rho_k = -\frac{1}{2^k} \log_2 \frac{1}{2^k} - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \log_2 \left(1 - \frac{1}{2^k}\right). \quad (3.4.23)$$

由(3.4.23)式可得出以下结论: (1) 对于形如(3.4.11)式的非对称类-W态, 粒子 $k$ 与其对偶子系统间的纠缠度 $E$ 与系统中的总粒子数 $n$ 无关; (2) 当 $k = 1$ 时,  $E = 1$ , 说明粒子1与它

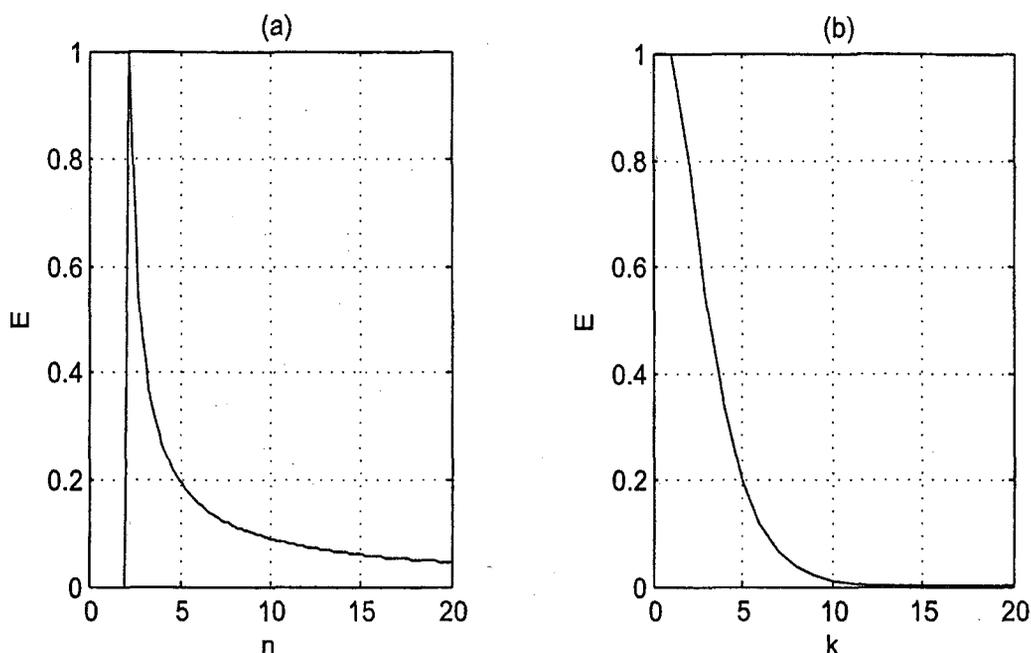


图 3.2 两种非对称类-W态的纠缠度。(a)表示第一种类-W态的纠缠度( $E$ )与总粒数( $n$ )的关系; (b)表示第二种类-W态的纠缠度( $E$ )与不同粒子间的关系。

Fig. 3.2 Schematic diagram of the entanglement of two kinds of unsymmetrical W-type states. (a) Denotes the relationship between the entanglement( $E$ ) and the particle numbers ( $n$ ); (b) Denotes the relationship between the entanglement( $E$ ) and different particles.

的对偶子系统间纠缠是最大纠缠。图3.2(b)给出了纠缠度 $E$ 随 $k$ 的变化关系,从图中我们可以看到,随着 $k$ 的增大,粒子 $k$ 与其对偶子系统之间的纠缠度迅速减小,说明系统中的粒子是不等价的。

(3.4.10)式和(3.4.11)式所表示的非对称类-W态是第1个粒子与它的对偶子系统的最大纠缠态,所以,用这种非对称的类-W态能实现确定的受控量子通讯<sup>[87]</sup>;如果对第1个粒子进行Von Neumann 测量或对第1个粒子求迹,则其余粒子仍以一定的概率处于纠缠态,进而可以完成概率的量子通讯,而GHZ态则不具备这种特性。

### 3.5 可行性分析

下面我们对本文提出的纠缠态制备方案的可行性进行简单分析。(1) 原子速度的控制可以通过对原子束的速度选择器来实现;(2) 在原子纠缠态的制备过程中,原子的自发辐射可以忽略。对于主量子数为49, 50, 和51的Rydberg原子,原子自发辐射时间约为 $T_r = 3 \times 10^{-2}$  s,原子与腔场的耦合常数为 $g = 2\pi \times 24\text{kHz}$ <sup>[78]</sup>。若取失谐量 $\delta = 10g$ ,

则原子与腔场相互作用时间的数量级为 $\delta/g^2 = 6.6 \times 10^{-5}$ s. 假设原子数为 $n = 4$ , 则完成整个纠缠态制备所需要的时间约为 $1.5 \times 10^{-4}$ 秒, 远小于原子自发辐射所需时间 $T_r = 3 \times 10^{-2}$  s. (3) 高Q腔的寿命可以达到 $3 \times 10^{-2}$ 秒<sup>[78]</sup>, 这个时间将比典型的原子和腔场的相互作用时间 $\delta/g^2 = 6.6 \times 10^{-5}$ s高三个数量级; 另外, 由于原子与腔场的频率是大失谐的, 原子间耦合及原子态在腔场中演化与腔场的量子态无关, 因此, 在此过程中腔的损耗可以忽略。

### 3.6 小结

本节我们对腔量子电动力学方法中原子与单模腔场相互作用的J-C模型进行简单介绍。回顾了两原子体系和多原子体系与共振腔场及大失谐腔场相互作用制备纠缠态方案。根据原子与大失谐腔场相互作用规律, 提出了制备多个二能级原子对称及非对称类-W态的制备方案并对该方案的实现进行了论证, 并分析了两种类-W态的纠缠度与体系中总粒子数及不同粒子之间的关系。

## 4 未知量子信息远程传输——量子隐形传态

量子隐形传态应用量子特性来实现信息的传送和处理,其信息容量大,可靠性高。这种方法能完成纯经典方法或纯量子方法都无法做到的量子态传送,它将对量子信息的处理、量子计算机、量子密码通信及量子信息控制等起到极大的推动作用。但目前这个领域仍处在实验研究阶段,还存在着一些关键问题没有解决。如(1)在通讯过程如何实现Bell态测量。(2)量子纠缠是量子通讯过程中不可或缺的主要物理资源,在远程传输过程中,如果纠缠态与环境相互作用而遭到破坏,必然会导致信息泄露,从而不能保证安全通讯。另外,任何一种物理资源都是有限的,纠缠也不例外,如何在信息传递过程,尽可能减少纠缠消耗也是有待解决的问题。(3)目前,较为理想的量子处理器是位于光腔中的原子,如果腔泄漏会改变原子及腔场所承载的量子信息,所以如何提高光腔的质量及找到一种切实可行的量子存储器仍是有待解决的问题。

本章我们首先给出了一种无需直接Bell态测量的量子隐形传态方案;然后提出如何只用一个EPR对实现多体类-GHZ态的隐形传态方案;考虑到W态具有抗退相干性,但只能实现概率传态的事实,我们提出了用两种非对称类-W态实现确定的单向受控量子隐形传态方案;分析了如何利用腔QED技术进行量子隐形传态,作为量子通道的纠缠态的纠缠形式有什么特点,给出了量子通道纠缠度与量子隐形传态成功概率的定性关系。

### 4.1 无需直接Bell基测量的多原子任意态量子隐形传态

本节利用腔QED技术,首先提出一种无需直接Bell态测量的两个二能级原子任意态量子隐形传态方案,并进一步推广至 $n$ 原子的情形。

#### 4.1.1 两体任意态隐形传态方案

假设两个二能级原子1, 2处于某个未知的任意态上,

$$|\psi\rangle_{12} = (a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle)_{12}, \quad (4.1.1)$$

这里,  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $d$ 是未知系数,并且满足归一化条件:  $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ 。发送者Alice要把这个未知的量子态传送给远处的接收者Bob,但原子1, 2要始终留在Alice这里。设Alice处的原子3和原子4初态为 $|00\rangle_{34}$ ,让这两个原子同时进入一个大失谐的单模腔场,并受一个很强的经典场驱动,取原子与腔场相互作用时间为:  $\lambda t = \frac{\pi}{4}$ ,  $\lambda = g^2/2\delta$ ,则可将原子制备在如下的EPR对上,

$$|\phi^1\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)_{34}. \quad (4.1.2)$$

同理, 将原子5、6也制备在EPR对上,

$$|\phi^1\rangle_{56} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)_{56}. \quad (4.1.3)$$

然后, 将原子4、6发送给Bob, 这样通信双方就建立了量子通道, 于是原子1、2及量子通道上的原子3、4和5、6所构成的量子体系量子态为,

$$|\psi\rangle_{tot} = |\psi\rangle_{12} \otimes |\phi\rangle_{34}^1 \otimes |\phi\rangle_{56}^1. \quad (4.1.4)$$

为实现隐形传态, Alice先把原子1、3送入强经典场驱动下的大失谐单模腔场中, 使非纠缠的原子态经历如下的演化过程,

$$|00\rangle_{13} \rightarrow |\phi^1\rangle_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)_{13} \quad (4.1.5a)$$

$$|01\rangle_{13} \rightarrow |\phi^2\rangle_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - i|10\rangle)_{13} \quad (4.1.5b)$$

$$|10\rangle_{13} \rightarrow |\phi^3\rangle_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - i|01\rangle)_{13} \quad (4.1.5c)$$

$$|11\rangle_{13} \rightarrow |\phi^4\rangle_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - i|00\rangle)_{13}. \quad (4.1.5d)$$

然后, 让原子2、5经历相同的演化过程,

$$|00\rangle_{25} \rightarrow |\phi^1\rangle_{25} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)_{25} \quad (4.1.6a)$$

$$|01\rangle_{25} \rightarrow |\phi^2\rangle_{25} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - i|10\rangle)_{25} \quad (4.1.6b)$$

$$|10\rangle_{25} \rightarrow |\phi^3\rangle_{25} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - i|01\rangle)_{25} \quad (4.1.6c)$$

$$|11\rangle_{25} \rightarrow |\phi^4\rangle_{25} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - i|00\rangle)_{25}. \quad (4.1.6d)$$

则原子系统量子态由(4.1.4)式将演化为,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{tot} = & \frac{1}{2} [a (|\phi^1\rangle_{13}|\phi^1\rangle_{25}|00\rangle_{46} - i|\phi^1\rangle_{13}|\phi^2\rangle_{25}|01\rangle_{46} - i|\phi^2\rangle_{13}|\phi^1\rangle_{25}|10\rangle_{46} - |\phi^2\rangle_{13}|\phi^2\rangle_{25}|11\rangle_{46}) \\ & + b (|\phi^1\rangle_{13}|\phi^3\rangle_{25}|00\rangle_{46} - i|\phi^1\rangle_{13}|\phi^4\rangle_{25}|01\rangle_{46} - i|\phi^2\rangle_{13}|\phi^3\rangle_{25}|10\rangle_{46} - |\phi^2\rangle_{13}|\phi^4\rangle_{25}|11\rangle_{46}) \\ & + c (|\phi^3\rangle_{13}|\phi^1\rangle_{25}|00\rangle_{46} - i|\phi^3\rangle_{13}|\phi^2\rangle_{25}|01\rangle_{46} - i|\phi^4\rangle_{13}|\phi^1\rangle_{25}|10\rangle_{46} - |\phi^4\rangle_{13}|\phi^2\rangle_{25}|11\rangle_{46}) \\ & + d (|\phi^3\rangle_{13}|\phi^3\rangle_{25}|00\rangle_{46} - i|\phi^3\rangle_{13}|\phi^4\rangle_{25}|01\rangle_{46} - i|\phi^4\rangle_{13}|\phi^3\rangle_{25}|10\rangle_{46} - |\phi^4\rangle_{13}|\phi^4\rangle_{25}|11\rangle_{46})]. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

将(4.1.5)式和(4.1.6)代入上式可得,

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{tot} = & \frac{1}{4} [ |0000\rangle_{1325} (a|00\rangle - b|01\rangle - c|10\rangle + d|11\rangle)_{46} \\
& - i |0001\rangle_{1325} (a|01\rangle + b|00\rangle - c|11\rangle - d|10\rangle)_{46} \\
& - |0010\rangle_{1325} (a|01\rangle - b|00\rangle - c|11\rangle + d|10\rangle)_{46} \\
& - i |0011\rangle_{1325} (a|00\rangle + b|01\rangle - c|10\rangle - d|11\rangle)_{46} \\
& - i |0100\rangle_{1325} (a|10\rangle - b|11\rangle + c|00\rangle - d|01\rangle)_{46} \\
& - |0101\rangle_{1325} (a|11\rangle + b|10\rangle + c|01\rangle + d|00\rangle)_{46} \\
& + i |0110\rangle_{1325} (a|11\rangle - b|10\rangle + c|01\rangle - d|00\rangle)_{46} \\
& - |0111\rangle_{1325} (a|10\rangle + b|11\rangle + c|00\rangle + d|01\rangle)_{46} \\
& - |1000\rangle_{1325} (a|10\rangle - b|11\rangle - c|00\rangle + d|01\rangle)_{46} \\
& + i |1001\rangle_{1325} (a|11\rangle + b|10\rangle - c|01\rangle - d|00\rangle)_{46} \\
& + |1010\rangle_{1325} (a|11\rangle - b|10\rangle - c|01\rangle + d|00\rangle)_{46} \\
& + i |1011\rangle_{1325} (a|10\rangle + b|11\rangle - c|00\rangle - d|01\rangle)_{46} \\
& - i |1100\rangle_{1325} (a|00\rangle - b|01\rangle + c|10\rangle - d|11\rangle)_{46} \\
& - |1101\rangle_{1325} (a|01\rangle + b|00\rangle + c|11\rangle + d|10\rangle)_{46} \\
& + i |1110\rangle_{1325} (a|01\rangle - b|00\rangle + c|11\rangle - d|10\rangle)_{46} \\
& - |1111\rangle_{1325} (a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle)_{46} ]. \tag{4.1.8}
\end{aligned}$$

由上式可知, 原子1、2的初始量子态已转移到4、6原子上, 而1、2原子的初态已完全破坏。

以上工作完成后, 1、3、2和5原子的量子态构建一个16维的Hilbert空间, 其基矢为 $\{|0000\rangle, |0001\rangle, \dots, |1111\rangle\}$ 。Alice分别对这四个原子进行测量, 测量结果有16种可能值, 每一种可能出现的概率均为 $\frac{1}{16}$ 。假设Alice测量值为 $|1110\rangle_{1325}$ , 并将结果通过经典信道通知Bob。测量后, Bob处的两原子4和6已坍缩为,

$$|\psi\rangle_{46} = (a|01\rangle - b|00\rangle + c|11\rangle - d|10\rangle)_{46} \tag{4.1.9}$$

如果Bob想得到Alice传给它的量子态(4.1.1)式, 他可以对原子6实施 $i\sigma_y$ 么正操作, 使(4.1.9)式变为,

$$|\psi\rangle_{46} = (a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle)_{46} \tag{4.1.10}$$

这样,原子1、2的原始态便完全转移到Bob处的两个原子上,完成了量子隐形传态过程,成功概率为1.0。其它15种情况也可以用相同的方法使Bob处的两原子的量子态变为Alice要发送的两原子的未知态。各种情况下的测量结果及相应的么正操作见表4.1。

表 4.1 Alice的测量结果及Bob施于4、6原子相应的么正操作  $U$ 

Tab.4.1 Alice's measurement results and Bob's corresponding operations on atoms 4 and 6

Alice的测量结果	测量后原子量子态 $ \psi\rangle_{46}$	对单原子么正操作	
		原子4	原子6
$ 0000\rangle_{1325}$	$(a 00\rangle - b 01\rangle - c 10\rangle + d 11\rangle)_{46}$	$\sigma_z$	$\sigma_z$
$ 0001\rangle_{1325}$	$(a 01\rangle + b 00\rangle - c 11\rangle - d 10\rangle)_{46}$	$\sigma_z$	$\sigma_x$
$ 0010\rangle_{1325}$	$(a 01\rangle - b 00\rangle - c 11\rangle + d 10\rangle)_{46}$	$\sigma_z$	$i\sigma_y$
$ 0011\rangle_{1325}$	$(a 00\rangle + b 01\rangle - c 10\rangle - d 11\rangle)_{46}$	$\sigma_z$	$I$
$ 0100\rangle_{1325}$	$(a 10\rangle - b 11\rangle + c 00\rangle - d 01\rangle)_{46}$	$\sigma_x$	$\sigma_z$
$ 0101\rangle_{1325}$	$(a 11\rangle + b 10\rangle + c 01\rangle + d 00\rangle)_{46}$	$\sigma_x$	$\sigma_x$
$ 0110\rangle_{1325}$	$(a 11\rangle - b 10\rangle + c 01\rangle - d 00\rangle)_{46}$	$\sigma_x$	$i\sigma_y$
$ 0111\rangle_{1325}$	$(a 10\rangle + b 11\rangle + c 00\rangle + d 01\rangle)_{46}$	$\sigma_x$	$I$
$ 1000\rangle_{1325}$	$(a 10\rangle - b 11\rangle - c 00\rangle + d 01\rangle)_{46}$	$i\sigma_y$	$\sigma_z$
$ 1001\rangle_{1325}$	$(a 11\rangle + b 10\rangle - c 01\rangle - d 00\rangle)_{46}$	$i\sigma_y$	$\sigma_x$
$ 1010\rangle_{1325}$	$(a 11\rangle - b 10\rangle - c 01\rangle + d 00\rangle)_{46}$	$i\sigma_y$	$i\sigma_y$
$ 1011\rangle_{1325}$	$(a 10\rangle + b 11\rangle - c 00\rangle - d 01\rangle)_{46}$	$i\sigma_y$	$I$
$ 1100\rangle_{1325}$	$(a 00\rangle - b 01\rangle + c 10\rangle - d 11\rangle)_{46}$	$I$	$\sigma_z$
$ 1101\rangle_{1325}$	$(a 01\rangle + b 00\rangle + c 11\rangle + d 10\rangle)_{46}$	$I$	$\sigma_x$
$ 1110\rangle_{1325}$	$(a 01\rangle - b 00\rangle + c 11\rangle - d 10\rangle)_{46}$	$I$	$i\sigma_y$
$ 1111\rangle_{1325}$	$(a 00\rangle + b 01\rangle + c 10\rangle + d 11\rangle)_{46}$	$I$	$I$

表中的 $I$ 为恒等操作,  $\sigma_i$ 为泡利矩阵。

#### 4.1.2 多体任意态隐形传态方案

这一节我们介绍如何利用受强经典场驱动的大失谐腔场来完成多量子比特任意态的量子隐形传态。

在量子通讯中,量子比特的非纠缠态基矢是用一个二进制数来表示的, $n$ 比特系统的非纠缠态一共有 $2^n$ 个非纠缠态基矢,而且每一个量子态均为一个 $n$ 位二进制数。一个多体量子态的任意态是这 $2^n$ 个非纠缠态基矢叠加态,如果 $n$ 很大,数学表达式很繁索。为了便于表达,我们将二进制数表示的量子态换为十进制数来表示,则一个 $n$ 比特的任意态可表示为,

$$|\psi\rangle_{\{n\}} = \sum_{j=0}^{2^n-1} c_j |j\rangle, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, 2^n - 1) \quad (4.1.11)$$

这里,  $\{n\} = (1, 2, \dots, n)$  表示一个粒子序列。假设原子序列  $(1, 2, \dots, n)$  属于 Alice, 她要将这样一个未知的多体量子态发送给 Bob。

首先,利用腔 QED 技术制备  $n$  对 EPR 对,

$$|\phi^1\rangle_{k'k''} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)_{k'k''} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.1.12)$$

并将粒子(这里指的是二能级原子) $k', k''$  分别分发给 Alice 和 Bob, 则所构建的量子信道可表示为,

$$\prod_{k=1}^n |\phi^1\rangle_{k'k''} = |\phi^1\rangle_{1'1''} \otimes |\phi^1\rangle_{2'2''} \otimes \dots \otimes |\phi^1\rangle_{n'n''}. \quad (4.1.13)$$

由未知量子态与量子信道所构成的系统量子态为,

$$|\psi\rangle_{tot} = |\psi\rangle_{\{n\}} \otimes \prod_{k=1}^n |\phi^1\rangle_{k'k''}. \quad (4.1.14)$$

Alice 依次将原子对  $(k, k')$  放入受经典场驱动的大失谐腔场中,按(3.3.32)式进行演化,待原子与腔场相互作用结束后,系统的量子态为,

$$|\psi\rangle_{tot} = \sum_{l^1=0}^3 \sum_{l^2=0}^3 \dots \sum_{l^n=0}^3 \left[ \left( \prod_{k=1}^n |l^k\rangle_{kk'} |\psi^{l^1 l^2 \dots l^n}\rangle_{1'' 2'' \dots n''} \right) \right]. \quad (4.1.15)$$

其中,  $|l^k\rangle_{kk'} = \{|0^k\rangle_{kk'}, |1^k\rangle_{kk'}, |2^k\rangle_{kk'}, |3^k\rangle_{kk'}\}$  是用十进制表示的原子对  $(k, k')$  的基矢。(4.1.15)式是一个纠缠态,  $\prod_{k=1}^n |l^k\rangle_{kk'}$  和  $|\psi^{l^1 l^2 \dots l^n}\rangle_{1'' 2'' \dots n''}$  分别是原子序列  $(1', 2', \dots, n')$  与  $(1'', 2'', \dots, n'')$  的量子态。

原子对  $(k, k')$  十进制与二进制基矢对应关系如下:

$$|0\rangle \longrightarrow |00\rangle, \quad |1\rangle \longrightarrow |01\rangle, \quad |2\rangle \longrightarrow |10\rangle, \quad |3\rangle \longrightarrow |11\rangle. \quad (4.1.16)$$

为表达方便, 我们再定义 $U_j (j = 0, 1, 2, 3)$ 来对应四个常用的一位门操作, 对应关系如下:

$$U_0 \longrightarrow \sigma_z, \quad U_1 \longrightarrow \sigma_x, \quad U_2 \longrightarrow i\sigma_y, \quad U_3 \longrightarrow I. \quad (4.1.17)$$

Alice在基矢 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 下, 对所有的原子对 $(k, k')$ 进行测量, 用十进制可将测量结果表示为 $|l\rangle (l = 0, 1, 2, 3)$ , 将测量结果以经典信息形式发送给Bob, 所消耗的经典信息量为 $2n \text{ cbits}$ . Bob据Alice的测量结果, 对其拥有粒子分别实施么正操作. Alice对原子对 $(k, k')$ 的测量结果与Bob对第 $k''$ 原子的么正操作是一一对应的, 对应关系如下:

表 4.2 Alice对原子对 $(k, k')$ 测量结果与Bob施于原子 $k''$ 么正操作对应关系

Tab.4.2 Relations between Alice's measurement results on atomic pair  $(k, k')$  and Bob's corresponding unitary operations on atom  $k''$

Alice对原子对 $(k, k')$ 的测量结果		Bob施于原子 $k''$ 的么正操作	
二进制表示的测量结果	十进制表示的测量结果	对应的U操作	实际的一位门操作
$ 00\rangle_{kk'}$	$ 0\rangle_{kk'}$	$U_0$	$\sigma_z$
$ 01\rangle_{kk'}$	$ 1\rangle_{kk'}$	$U_1$	$\sigma_x$
$ 10\rangle_{kk'}$	$ 2\rangle_{kk'}$	$U_2$	$i\sigma_y$
$ 11\rangle_{kk'}$	$ 3\rangle_{kk'}$	$U_3$	$I$

经上述一系列的操作过程, Bob处的原子序列 $(1'', 2'', \dots, n'')$ 已完全被制备在由(4.1.11)式所表示的、Alice要传送的未知目标态上了。

以上我们给出了借助于腔QED理论来实现多原子任意态的隐形传态方案, 下面我们两原子为例来验证这一方案的正确性. 根据上一节的讨论, 假设Alice对原子对 $(1, 1')$ 、 $(2, 2')$ 的测量结果为 $|2\rangle_{11'}|1\rangle_{22'} \leftrightarrow |10\rangle_{11'}|01\rangle_{22'}$ , 由本节提出的传输方案, 立即可以推定Bob需对原子 $1''$ 和原子 $2''$ 分别施以 $i\sigma_y$ 和 $\sigma_x$ , 与表4.1的结果一致。

#### 4.1.3 小结

本节利用腔QED理论提出一种确定的(相对于概率传态而言的)两原子任意态隐形传态方案, 进而推广至多原子的情形. 本方案的优势在于:(1)在隐形传态过程中, 用对

原子的分别测量来代替在实验上难以实现的直接Bell态测量；(2) 由于原子受强经典场的驱动，使原子与腔场的相互作用与腔场的量子态无关，这样便可能消除腔泄漏及环境热场的影响；(3) 在多体隐形传态方案中，我们引入十进制数来表示量子比特的量子态，给出了Alice的测量结果与Bob的么正操作之间简单明了的一一对应关系，使复杂的多体问题简单化；(4) 利用现有的腔QED技术<sup>[138,144,145]</sup>，本方案在实验上是可行的。

## 4.2 利用一个EPR对实现多个量子比特类-GHZ态隐形传态

在量子通讯中，纠缠态充当了量子信道，在保证信息的准确安全传输的情况，我们希望尽可能减少纠缠资源的消耗。上节讨论的两个量子比特任意态隐形传态方案，在量子信道中，至少需要两个EPR对，即2 *ebits*的纠缠。如果两个量子比特处于形如 $c_0|00\rangle + c_1|11\rangle$ 的未知纠缠态( $c_0$ 和 $c_1$ 为归一化常数)，能否用少于2 *ebits*的纠缠来实现隐形传态。金<sup>[146]</sup>等人提出，用一个三粒子GHZ态做为量子通道来实现 $c_0|00\rangle + c_1|11\rangle$ 态的隐形传态，量子通道中要有三个粒子。我们提出的隐形传态方案中<sup>[122]</sup>，仅采用一个EPR对(量子通道中包含两个粒子)，通信双方就能够完成对该种未知目标态的确定隐形传态。而且，我们将这一方案推广至 $n$ 粒子类-GHZ态隐形传态的情形，并使双方的通讯过程受到一个或多个监控者的控制。

### 4.2.1 利用一个EPR对实现两个量子比特类-GHZ态隐形传态

假设Alice要发送给Bob的未知量子态为，

$$|\psi\rangle_{12} = (c_0|00\rangle + c_1|11\rangle)_{12} \quad (4.2.1)$$

其中，1、2表示两个二能级原子， $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ 。量子通道为一个EPR对，

$$|\phi^1\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)_{34} \quad (4.2.2)$$

原子1、2、3属于Alice，Bob拥有原子4。

包括这四个原子的系统量子态可以表示为，

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1234} &= |\psi\rangle_{12} \otimes |\phi^1\rangle_{34} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_0|0000\rangle + c_1|1010\rangle - ic_0|0101\rangle - ic_1|1111\rangle)_{1324}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

(1) Alice将原子1、3通过第3.3.2节所描述的腔场中进行态的演化，由(3.3.32)式，当原子

与腔场相互作用后,系统的量子态变为,

$$|\psi\rangle_{1234} = |00\rangle_{13}(c_0|00\rangle + c_1|11\rangle)_{24} - i|01\rangle_{13}(c_0|00\rangle - c_1|11\rangle)_{24} \\ + |10\rangle_{13}(c_1|01\rangle + c_0|10\rangle)_{24} - i|11\rangle_{13}(c_1|01\rangle - c_0|10\rangle)_{24}. \quad (4.2.4)$$

(2) Alice对原子1、3在 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 进行Von-Neumann 测量,测量将导致系统态的坍缩,可能的测量结果及对应的坍缩态(见表4.3), Alice将测量结果通知Bob。

表 4.3 Alice的测量结果及Bob施于原子4相应的么正操作

Tab.4.3 Alice's measurement results and Bob's corresponding unitary operations on atom 4

Alice的测量结果	塌缩态	Bob么正操作
$ 00\rangle_{13}$	$(c_0 00\rangle + c_1 11\rangle)_{24}$	$I$
$ 01\rangle_{13}$	$(c_0 00\rangle - c_1 11\rangle)_{24}$	$\sigma_z$
$ 10\rangle_{13}$	$(c_1 01\rangle + c_0 10\rangle)_{24}$	$\sigma_x$
$ 11\rangle_{13}$	$(c_1 01\rangle - c_0 10\rangle)_{24}$	$i\sigma_y$

(3) Bob据Alice的测量结果,对其拥有的原子实施相应的么正操作,使原子2、4的量子态变为,

$$|\psi\rangle_{24} = (c_0|00\rangle + c_1|11\rangle)_{24}. \quad (4.2.5)$$

这样,1、2原子初态所承载的量子信息全部转移到2、4原子上,并由通信双方共享。

(4) Alice对原子2实施Hadamard ( $H$ ) 操作。 $H$ 操作后,(4.2.5)式演变为,

$$H|\psi\rangle_{24} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle_2 (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)_4 + |1\rangle_2 (c_0|0\rangle - c_1|1\rangle)_4]. \quad (4.2.6)$$

然后, Alice 对原子2进行测量,测量的结果只能是 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ ,相应的原子4的量子态分别坍缩为,

$$(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)_4, \quad (c_0|0\rangle - c_1|1\rangle)_4. \quad (4.2.7)$$

Alice将测量结果通过经典信道通知Bob。

(5) Bob对原子4实施相应的恒等操作 $I$ 或 $\sigma_z$  操作,使原子4的量子态演变为,

$$|\psi\rangle_4 = (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)_4. \quad (4.2.8)$$

(6) 为恢复(4.2.1)式所表示的两个量子比特的纠缠态, Bob需要引入一个辅助的二能级原子 $a$ , 它的初态为 $|0\rangle_a$ , 则

$$|\psi\rangle_{4a} = (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)_4 |0\rangle_a. \quad (4.2.9)$$

(7) 最后, Bob对其拥有的两个量子位实施控制-非 ( $C_{Not} = |0\rangle\langle 0|I + |1\rangle\langle 1|\sigma_x$ ) 操作, 若以原子4所表示的量子位为控制位, 以辅助原子所表示的量子位为靶位,  $C_{Not}$ 操作的结果是使(4.2.9)式变为,

$$|\psi\rangle_{4a} = (c_0|00\rangle + c_1|11\rangle)_{4a} \quad (4.2.10)$$

至此, (4.2.1)式表示的未知量子信息全部转移到量子位4及辅助量子位 $a$ 上。下面我们考虑多个量子比特的情形。

#### 4.2.2 用一个EPR对实现多个量子比特类-GHZ态隐形传态

假设发送者Alice想要把 $n$ -原子的未知类-GHZ态发送给Bob,

$$|\psi\rangle_{12\dots n} = (c_0|00\dots 00\rangle + c_1|11\dots 11\rangle)_{12\dots n}. \quad (4.2.11)$$

为表达方便, 将上式改写为,

$$|\psi\rangle_{12\dots n} = c_0|0\rangle_1|\psi_1(0)\rangle + c_1|1\rangle_1|\psi_1(1)\rangle, \quad (4.2.12)$$

其中,

$$|\psi_1(0)\rangle = |00\dots 00\rangle_{23\dots n} \quad (4.2.13a)$$

$$|\psi_1(1)\rangle = |11\dots 11\rangle_{23\dots n}. \quad (4.2.13b)$$

Alice与Bob间共享一个EPR对,

$$|\phi^1\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - i|11\rangle)_{AB} \quad (4.2.14)$$

A、B原子分别被Alice和Bob所拥有, 包括这 $n + 2$ 个量子比特所构成系统的量子态为,

$$|\psi\rangle_{tot} = |\phi^1\rangle_{AB} \otimes |\psi\rangle_{12\dots n}. \quad (4.2.15)$$

(1) Alice将原子1及原子A送入第3.3.2节所阐述的腔场中, 调整相互作用时间, 使其量子态演化遵循(3.3.32)式, 此时系统的量子态变为,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{tot} = & |00\rangle_{1A}(c_0|\psi_1(0)\rangle|0\rangle_B + c_1|\psi_1(1)\rangle|1\rangle_B) - i|01\rangle_{1A}(c_0|\psi_1(0)\rangle|0\rangle_B - c_1|\psi_1(1)\rangle|1\rangle_B) \\ & + |10\rangle_{1A}(c_1|\psi_1(0)\rangle|1\rangle_B + c_0|\psi_1(1)\rangle|0\rangle_B) - i|11\rangle_{1A}(c_0|\psi_1(0)\rangle|1\rangle_B - c_1|\psi_1(1)\rangle|0\rangle_B). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

(2) 与前面的讨论相似, Alice对原子1及原子A进行Von-Neumann测量, 并把测量结果用经典信息告诉相距很远的Bob。根据Alice的测量结果, Bob对原子B实施相应的么正操作(见表4.4), 使余下的量子比特的量子态变为,

$$|\psi\rangle_{23\dots nB} = c_0|\psi_1(0)\rangle|0\rangle_B + c_1|\psi_1(1)\rangle|1\rangle_B. \quad (4.2.17)$$

表 4.4 Alice的测量结果, Bob施于原子B相应的么正操作

Tab.4.4 Alice's measurement results and Bob's corresponding unitary operations on atom B

Alice的测量结果	塌缩态	Bob么正操作
$ 00\rangle_{1A}$	$c_0 \psi_1(0)\rangle 0\rangle_B + c_1 \psi_1(1)\rangle 1\rangle_B$	$I$
$ 01\rangle_{1A}$	$c_0 \psi_1(0)\rangle 0\rangle_B - c_1 \psi_1(1)\rangle 1\rangle_B$	$\sigma_z$
$ 10\rangle_{1A}$	$c_1 \psi_1(0)\rangle 1\rangle_B + c_0 \psi_1(1)\rangle 0\rangle_B$	$\sigma_x$
$ 11\rangle_{1A}$	$c_0 \psi_1(0)\rangle 1\rangle_B - c_1 \psi_1(1)\rangle 0\rangle_B$	$i\sigma_y$

将上式进一步改写为,

$$|\psi\rangle_{23\dots nB} = c_0|\psi_{12}(0)\rangle|0\rangle_B|0\rangle_2 + c_1|\psi_{12}(1)\rangle|1\rangle_B|1\rangle_2, \quad (4.2.18)$$

其中,

$$|\psi_{12}(0)\rangle = |00\dots 00\rangle_{34\dots n} \quad (4.2.19a)$$

$$|\psi_{12}(1)\rangle = |11\dots 11\rangle_{34\dots n}. \quad (4.2.19b)$$

(3) Alice对原子2实施Hadamard 操作,

$$H|\psi\rangle_{23\dots nB} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(c_0|\psi_{12}(0)\rangle|0\rangle_B + c_1|\psi_{12}(1)\rangle|1\rangle_B)|0\rangle_2 + (c_0|\psi_{12}(0)\rangle|0\rangle_B - c_1|\psi_{12}(1)\rangle|1\rangle_B)|1\rangle_2]. \quad (4.2.20)$$

(4) 再对原子2在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基矢下进行测量, 对应的系统坍缩态为,

$$|0\rangle_2: |\psi\rangle_{34\dots nB} = c_0|\psi_{12}(0)\rangle|0\rangle_B + c_1|\psi_{12}(1)\rangle|1\rangle_B \quad (4.2.21a)$$

$$|1\rangle_2: |\psi\rangle_{34\dots nB} = c_0|\psi_{12}(0)\rangle|0\rangle_B - c_1|\psi_{12}(1)\rangle|1\rangle_B. \quad (4.2.21b)$$

我们定义一个变量 $V_2 = 0, 1$ 分别对应着Alice的测量结果 $|0\rangle_2, |1\rangle_2$ 。

(5) Alice重复步骤(3)、(4)对余下原子实施相同的操作及测量, 共获得 $n-1$ 个测量值 $V_j(j \in 2, 3, \dots, n)$ , 然后, 对所有测量值实行模2加计算,

$$V = V_2 \oplus V_3 \oplus \dots \oplus V_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (4.2.22)$$

(6) Alice将V的计算值0或1通过经典信息通知Bob, Bob对原子B进行相应的恒等操作或 $\sigma_z$ 操作。最后, 原子B的量子态变为,

$$|\psi\rangle_B = c_0|0\rangle_B + c_1|1\rangle_B. \quad (4.2.23)$$

(7) Bob引入 $n-1$ 个初态均为基态的原子 $a_2, a_3, \dots, a_n$ , 原子B与辅助原子的量子态为,

$$|\psi\rangle_{Ba_2, a_3, \dots, a_n} = (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle_B |00\dots\rangle_{a_2, a_3, \dots, a_n}). \quad (4.2.24)$$

然后, 以原子B为控制位, 以辅助原子为靶位, 分别对每一个辅助原子实施控制-非操作, Bob即可得到Alice要发给他的未知量子态,

$$|\psi\rangle_{Ba_2, a_3, \dots, a_n} = c_0 \underbrace{|00\dots 0\rangle}_{n \text{ atoms}} + c_1 \underbrace{|11\dots 1\rangle}_{n \text{ atoms}}. \quad (4.2.25)$$

在这一过程看, 只消耗1 cibt的纠缠资源, 并伴随着3 cibt的经典信息的传输。

### 4.2.3 多个量子比特类-GHZ态受控隐形传态

假设信息的发送者要将(4.2.1)式所表示的多体未知量子态发送给远处的两人当中任何一个, 而且, 希望这一信息传输过程受到两人当中另外一个人的控制。要完成这一通信任务, 需要在通信三方共享一个三粒子的GHZ态做为量子信道,

$$|\phi^1\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)_{ABC} \quad (4.2.26)$$

承载未知态的 $n$ 个原子及原子A属于Alice, 其余两原子B和C分别被Bob和Charlie所拥有。

(1) 按上节所描述的(1)至(5)步骤, Alice对其手中 $n+1$ 个粒子进行操作、测量, 获得V的值, 此时, 原子B和原子C处于相应的纠缠态上,

$$\begin{cases} V = 0: |\psi\rangle_{BC} = c_0|00\rangle_{BC} + c_1|11\rangle_{BC}, \\ V = 1: |\psi\rangle_{BC} = c_0|00\rangle_{BC} - c_1|11\rangle_{BC}. \end{cases} \quad (4.2.27)$$

如果Alice想将目标态发送给Bob, 她可以用1cbit的经典信息告诉Bob V的值是什么。

(2) 如果Charlie同意让Bob接收这个目标态, 他还需对粒子C实施Hadamard操作, 则

$$\begin{cases} V = 0: H|\psi\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)_B |0\rangle_C + (c_0|0\rangle - c_1|1\rangle)_B |0\rangle_C], \\ V = 1: H|\psi\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(c_0|0\rangle - c_1|1\rangle)_B |0\rangle_C + (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)_B |0\rangle_C]. \end{cases} \quad (4.2.28)$$

接着, Charlie对粒子C进行测量, 可能测量结果只有 $|0\rangle_C$ 或 $|1\rangle_C$ , 对应的 $V_C$ 值为0或1, 并将这一结果告诉Bob。

(3) Bob据获得的全部信息, 做一个模2加计算,

$$V' = V \oplus V_C = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (4.2.29)$$

对应 $V' = 0$ 或 $1$ , Bob对粒子B实施恒等操作 $I$ 或 $\sigma_z$ 操作, 使粒子B量子态变成(4.2.23)式的形式。

后面的操作与上节的步骤(7)相同。这一通讯过程, 需要有Charlie配合才能完成, Charlie扮演了监控者的角色, 这一过程需传输4 *cbits*的经典信息。同样, 也可以在Bob的监控下, Alice将目标态发送给Charlie。

本方案可以推广至 $m$ 个接收者的情形, 只需要通讯各方共享一个多体GHZ态,

$$|\phi^1\rangle_{AB_1 \dots B_m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00 \dots 0\rangle + |11 \dots 1\rangle)_{AB_1 \dots B_m} \quad (4.2.30)$$

Alice可将目标态发送给任何一个接收者, 但需在其他 $m - 1$ 个人的配合下才能完成, 这样充分保证通讯过程的安全性。这一过程需要传输 $(2 + m)$  *cbits*的经典信息。

#### 4.2.4 小结

本节讨论的量子通讯过程, 目标态是 $n$ -体量子态, 按传统的方法<sup>[88]</sup>, 要实现确定的 $n$ -体量子态的隐形传态, 在构建量子通道时, 至少需要提供 $n$ 个EPR对作为必要纠缠资源, 也就是说, 在量子通道中至少要有 $2n$ 个粒子。而在我们提出的方案中, 通过引入辅助粒子及Hadamard操作, 在量子信道中只有一个EPR对, 大大缓解了信道的压力, 并节省物理资源。另一方面, 如果Alice将每次的测量结果都通过经典通道通知Bob, 整个通讯过程需消耗 $(n + 1)$  *cbits*的经典信息。而在我们的方案中, Alice通过一个简单的模2加计算, 无论目标态中包含多少个粒子, 通讯过程所消耗的经典信息均为3 *cbits*。另外, 本节所提出的受控隐形传态方案中, Alice与任何一方的通信, 都是在一方或多方的监控下完成的。每增加一个监控者, 只需在量子通道中增加一个粒子, 在经典通讯中多消耗1 *cbit*。这种受控通信方案增强了量子通讯过程的安全性。但本节提出的隐形传态方案, 需要信息的接收方实施 $C_{Not}$ 操作。 $C_{Not}$ 门是一个常用的二位量子逻辑门, 实现起来要比一位门复杂些。所以, 此理论方案最大优势在于节省纠缠资源, 但具体操作过程可能要复杂些。

### 4.3 利用类-W态实现确定的单向受控量子隐形传态

受控量子隐形传态是指在信息的传送过程受到一个或多个监控者的控制, 要实现这种受控信息传输, 需要通信双方及监控者之间共享一个或多个纠缠态, 例如: GHZ态<sup>[120,122,151,152]</sup>. 由于W态具有抗退相干性, 即对W态中一个粒子求迹, 余下的粒子之间仍处于纠缠态, 仍可以做为量子通道进行量子通讯. Shi等人<sup>[123]</sup>第一次提出用对称三体W态 $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$ 做为纠缠资源进行单粒子态的隐形传态, 但只能完成概率传态, 成功概率为 $\frac{2}{3}$ . 如果目标是两粒子任意态<sup>[127]</sup>, 则成功概率仅为 $\frac{4}{9}$ . 郑在2006年<sup>[153]</sup>提出用形如 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|100\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{n-1}}|n-2, 1\rangle)$ 的n-粒子非对称纠缠态来完成确定的单粒子态隐形传态, 但文中没有给出这种多原子类-W态的如何制备. 在第3章中, 我们利用腔QED理论, 提出了这种非对称类-W态的制备方案, 并提出另一种类-W态(见(3.4.11)式)及相应的制备方法. 下面我们讨论利用这两种类-W态来完成两原子任意态的隐形传态及这两种纠缠态的纠缠特点.

#### 4.3.1 传统方法利用W态实现量子态概率传态

传统方法实现量子隐形传态<sup>[88,120,152]</sup>的关键步骤是Bell基测量及Von Neumann测量. 如果通信双方共享的量子通道是最大纠缠态, 如EPR对, GHZ态等, 则可实现确定的量子通讯过程; 如果量子通道是非最大纠缠态, 则通讯过程的成功概率小于1, 只能实现概率传态过程<sup>[108,151]</sup>. W态做量子通道, 如果用传统隐形传态方案, 只能实现概率传态. 下面我们以多粒子任意W态作为量子通道, 用传统方法来实现单粒子隐形传态, 并给出这种情况下隐形传态的成功概率.

假设一个两态系统的未知量子态为,

$$|\phi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_{1''} \quad (4.3.1)$$

$\alpha$ 和 $\beta$ 是未知系数, 满足归一化条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . 信息的发送者Alice与她的n个客户 $Bob_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 之间共享纠缠态,

$$|\psi\rangle = (c_0|10\dots 0\rangle + c_1|010\dots 0\rangle + \dots + c_n|0\dots 01\rangle)_{1'12\dots n} \quad (4.3.2)$$

这是(n+1)-粒子任意W态, 其中 $c_k$ 是一化系数, 满足 $\sum_{k=0}^n c_k = 1$ , Alice拥有粒子1'和粒子1'', 粒子k属于 $Bob_k$ .

Alice想要将这个未知量子态发送给 $Bob_k$ , 但不能伴随实物粒子的空间移动, 具体方案如下:

为表达方便,我们将上面的纠缠态改写成下面的形式,

$$|\psi\rangle = |1\rangle_{1'}|\varphi\rangle_{\{j\}} + |0\rangle_{1'}|\chi\rangle_{\{j\}}. \quad (4.3.3)$$

式中,

$$|\varphi\rangle_{\{j\}} = c_0|0\cdots 0\rangle_{12\cdots n}, \quad |\chi\rangle_{\{j\}} = (c_1|10\cdots 0\rangle + |010\cdots 0\rangle + \cdots + c_n|0\cdots 01\rangle)_{12\cdots n}. \quad (4.3.4)$$

下标 $\{j\} = 1, 2, \dots, n$ 表示一个粒子序列。

全部粒子的量子态是目标态与纠缠态的直积态,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{tot} &= |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \\ &= \alpha|\chi\rangle_{\{j\}}|00\rangle_{1''1'} + \alpha|\varphi\rangle_{\{j\}}|01\rangle_{1''1'} + \beta|\chi\rangle_{\{j\}}|10\rangle_{1''1'} + \beta|\varphi\rangle_{\{j\}}|11\rangle_{1''1'}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

将上式用Bell $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ 和 $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ 基展开,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{tot} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\phi^+\rangle_{1''1'}(\alpha|\chi\rangle_{\{j\}} + \beta|\varphi\rangle_{\{j\}}) + |\phi^-\rangle_{1''1'}(\alpha|\chi\rangle_{\{j\}} - \beta|\varphi\rangle_{\{j\}})\} \\ &\quad + |\psi^+\rangle_{1''1'}(\alpha|\varphi\rangle_{\{j\}} + \beta|\chi\rangle_{\{j\}}) + |\psi^-\rangle_{1''1'}(\alpha|\varphi\rangle_{\{j\}} - \beta|\chi\rangle_{\{j\}}). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Alice对粒子对 $(1'', 1')$ 实施Bell基测量,有四种可能的结果,对应每一种测量结果出现的概率如下,

$$\begin{cases} |\phi^\pm\rangle_{1''1'}: & \frac{1}{2}(|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2) \\ |\psi^\pm\rangle_{1''1'}: & \frac{1}{2}(|\alpha|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2). \end{cases} \quad (4.3.7)$$

如果测量结果是 $|\phi^+\rangle_{1''1'}$ ,则对应的概率为 $P_1 = \frac{1}{2}(|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2)$ ,对应的系统坍缩态为,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\{j\}} &= \frac{\alpha|\chi\rangle_{\{j\}} + \beta|\varphi\rangle_{\{j\}}}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2}} \\ &= \frac{[\alpha(c_1|10\cdots 0\rangle + c_2|010\cdots 0\rangle + \cdots + c_n|0\cdots 01\rangle) + \beta c_0|0\cdots 0\rangle]_{12\cdots n}}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2}} \\ &= \frac{(\beta c_0|0\rangle_k + \alpha c_k|1\rangle_k)|00\cdots 0\rangle_{\{j \neq k\}}}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2}} \\ &\quad + \frac{\alpha|0\rangle_k(c_1|10\cdots 0\rangle + c_2|010\cdots 0\rangle + \cdots + c_n|0\cdots 01\rangle)_{\{j \neq k\}}}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2}} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Alice通过经典信道将测量结果通知Bob<sub>k</sub>,并要求其它客户分别对粒子j(j ≠ k)进行测量,如果测量结果中有一个粒子处于|1⟩态,则隐形传态失败。如果测量结果为|00⋯0⟩<sub>{j≠k}</sub>,此量子通讯过程可能成功。测量结果为|00⋯0⟩<sub>{j≠k}</sub>的概率为,

$$P_2 = \frac{|\beta|^2|c_0|^2 + |\alpha|^2|c_k|^2}{|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2}. \quad (4.3.9)$$

则(4.3.8)式将塌缩为,

$$|\psi\rangle_k = \frac{\beta c_0|0\rangle_k + \alpha c_k|1\rangle_k}{\sqrt{|\beta|^2|c_0|^2 + |\alpha|^2|c_k|^2}}. \quad (4.3.10)$$

引入一个辅助粒子|0⟩<sub>a</sub>,如果|c<sub>0</sub>| < |c<sub>k</sub>|,在基矢{|00⟩,|01⟩,|10⟩,|11⟩}<sub>ka</sub>下,对两粒子实施下面的幺正操作,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{1 - \frac{|c_0|^2}{|c_k|^2}} & \frac{c_0}{c_k} & 0 \\ 0 & -\frac{c_0}{c_k} & \sqrt{1 - \frac{|c_0|^2}{|c_k|^2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.11)$$

可得,

$$\frac{\beta c_0|0\rangle_k + \alpha c_k|1\rangle_k}{\sqrt{|\beta|^2|c_0|^2 + |\alpha|^2|c_k|^2}}|0\rangle_a \Rightarrow \frac{c_0(\beta|0\rangle_k + \alpha|1\rangle_k)|0\rangle_a + \alpha c_k \sqrt{1 - \frac{|c_0|^2}{|c_k|^2}}|1\rangle_k|1\rangle_a}{\sqrt{|\beta|^2|c_0|^2 + |\alpha|^2|c_k|^2}}. \quad (4.3.12)$$

Bob<sub>k</sub>对辅助粒子a在基矢{|0⟩,|1⟩}<sub>a</sub>下实施投影测量,测量结果为|0⟩<sub>a</sub>的概率为,

$$P_3 = \frac{|c_0|^2}{|\beta|^2|c_0|^2 + |\alpha|^2|c_k|^2}. \quad (4.3.13)$$

粒子k的量子态相应地变为,

$$\beta|0\rangle_k + \alpha|1\rangle_k \quad (4.3.14)$$

再对粒子k实施σ<sub>x</sub>操作,Bob<sub>k</sub>就可以完全获得(4.3.1)式所示的目标态,成功的概率为,

$$\begin{aligned} P &= P_1 P_2 P_3 \\ &= \frac{1}{2} (|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2) \cdot \frac{|\beta|^2|c_0|^2 + |\alpha|^2|c_k|^2}{|\alpha|^2|\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2} \cdot \frac{|c_0|^2}{|\beta|^2|c_0|^2 + |\alpha|^2|c_k|^2} \\ &= \frac{|c_0|^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

对应于Alice其它3种结果,也可以用同样的方法使粒子k转变为(4.3.1)式所示的目标态,成功的概率均为 $\frac{|c_0|^2}{2}$ ,单粒子隐形传态的总概率为 $4 \times \frac{|c_0|^2}{2} = 2|c_0|^2$ ,与目标态无关。

类似地,如果 $|c_0| > |c_k|$ ,对应(4.3.11)式的 $U$ 变换

$$U = \begin{bmatrix} \frac{c_k}{c_0} & 0 & \sqrt{1 - \frac{|c_k|^2}{|c_0|^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{1 - \frac{|c_k|^2}{|c_0|^2}} & 0 & -\frac{|c_k|^2}{|c_0|^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.16)$$

对应的该通讯过程的成功概率为 $2|c_k|^2$ 。

我们把以上结论推广至一般情形,我们把Alice记为 $Bob_0$ ,在这一通讯网络中共有 $n + 1$ 个体,如果他们共享一个形如(4.3.2)式所表示的量子纠缠态,则任意两者 $Bob_j$ 与 $Bob_k$  ( $j \neq k = 0, 1, \dots, n$ )之间的单粒子隐形传态的成功概率可以表示为 $2\text{Min}(|c_k|^2, |c_j|^2)$ ,  $\text{Min}(|c_k|^2, |c_j|^2)$ 表示 $|c_k|^2$ 与 $|c_j|^2$ 两者取其小。特别地,如果(4.3.2)式是 $(n+1)$ -体对称 $W$ 态,则纠缠态中各项系数相等 $c_0 = c_1 = \dots = c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ,则该过程的成功概率为 $\frac{2}{n+1}$ 。由于 $\sum_{k=0}^n |c_k|^2 = 1$ ,所以,  $\text{Min}(|c_k|^2, |c_j|^2) < \frac{1}{2}$ ,进而一定有 $2\text{Min}(|c_k|^2, |c_j|^2) < 1$ ,这说明,无论是对称的 $W$ 态还是非对称的类- $W$ 态,利用传统的方法只能实现概率传态。但如果借助于腔QED理论,利用特殊的非对称类- $W$ 态可以实现确定的隐形传态,下面分别加以介绍。

#### 4.3.2 利用三粒子类- $W$ 态实现两体量子态确定隐形传态

当粒子数为3时,(3.4.10)式和(3.4.11)式所表示的两种类- $W$ 态具有相同的形式:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2}|001\rangle + \frac{1}{2}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle\right) \quad (4.3.17)$$

假设Alice要将(4.1.1)式所表示的两原子任意发送给远处的Bob。首先,要在通信双方间构建一个量子通道,将原子3、4、5和原子6、7、8分别制备在(4.3.17)式所示的纠缠态上,然后将原子4、5、7、8发送给Bob,全部原子系统的量子态为,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{tot} &= (a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle)_{12} \\ &\otimes \left(\frac{1}{2}|001\rangle + \frac{1}{2}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle\right)_{345} \\ &\otimes \left(\frac{1}{2}|001\rangle + \frac{1}{2}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle\right)_{678}. \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

用Bell基将上式展开,

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{tot} = & |\phi^\pm\rangle_{13}|\phi^\pm\rangle_{26} \left[ \frac{a}{2}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} + \gamma_{26} \frac{b}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}|00\rangle_{78} \right. \\
 & + \gamma_{13} \frac{c}{\sqrt{2}}|00\rangle_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} + \gamma_{13}\gamma_{26}d|0000\rangle_{4578} \left. \right] \\
 & + |\psi^\pm\rangle_{13}|\psi^\pm\rangle_{26} \left[ a|0000\rangle_{4578} + \gamma_{26} \frac{b}{\sqrt{2}}|00\rangle_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} \right. \\
 & + \gamma_{13} \frac{c}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}|00\rangle_{78} + \gamma_{13}\gamma_{26} \frac{d}{2}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} \left. \right] \\
 & + |\phi^\pm\rangle_{13}|\psi^\pm\rangle_{26} \left[ \frac{a}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}|00\rangle_{78} + \gamma_{26} \frac{b}{2}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} \right. \\
 & + \gamma_{13}c|0000\rangle_{4578} + \gamma_{13}\gamma_{26} \frac{d}{\sqrt{2}}|00\rangle_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} \left. \right] \\
 & + |\psi^\pm\rangle_{13}|\phi^\pm\rangle_{26} \left[ \frac{a}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{45}|01\rangle + |10\rangle)_{78} + \gamma_{26}b|0000\rangle_{4578} \right. \\
 & + \gamma_{13} \frac{c}{2}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} + \gamma_{13}\gamma_{26} \frac{d}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}|00\rangle_{78} \left. \right],
 \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

其中,  $\gamma_{ij}$  表示“+1”或“-1”, 与Bell基 $\phi_{ij}^\pm$ 或 $\psi_{ij}^\pm$ 的上标符号相对应。

Alice分别对原子对(1,3)和(2,6)实施Bell基测量(后面将介绍如何用单粒子Von Nueman测量来代替直接Bell测量)。将有16种可能的测量结果, 每一种结果出现的概率均为 $\frac{1}{16}$ 。假设测量结果是 $|\phi^-\rangle_{13}|\phi^+\rangle_{26}$ , 则对应的 $\gamma_{13} = -1$ ,  $\gamma_{26} = +1$ , 相应系统的塌缩量子态为

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{4578} = & \frac{a}{2}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} \\
 & + \frac{b}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{45}|00\rangle_{78} \\
 & - \frac{c}{\sqrt{2}}|00\rangle_{45}(|01\rangle + |10\rangle)_{78} \\
 & - d|0000\rangle_{4578}.
 \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

显然, 原子4、5、7、8承载了目标量子态的全部信息。为了能在Bob处准确地还原Alice要发给送的量子信息, Bob需要从经典信息中获得Alice的测量结果, 并对原子对(4, 5)和(7, 8)分别施以如下的么正变换,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) & \rightarrow |10\rangle, \\
 |00\rangle & \rightarrow |00\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

这将使(4.3.20)式演化为,

$$|\psi\rangle_{4578} \rightarrow |00\rangle_{47}(a|11\rangle + b|10\rangle - c|01\rangle - d|00\rangle)_{58}. \quad (4.3.22)$$

由上式可知, Bob已将原子对(4, 7)从(4.3.20)式的纠缠态中分离出来, 然后, 再对原子5和原子8分别施以 $i\sigma_y$ 和 $\sigma_x$ , 这样, 目标态被成功地制备在原子5、8上。

在本方案中, Alice的测量结果有16不同的情况, 对原子对(1, 3)和(2, 6)测量结果分别决定了Bob要对原子5、8实施怎样的一位门操作, 对应关系如下:

$$|\phi^+\rangle \rightarrow \sigma_x, \quad |\phi^-\rangle \rightarrow i\sigma_y, \quad |\psi^-\rangle \rightarrow \sigma_z, \quad |\psi^+\rangle \rightarrow I. \quad (4.3.23)$$

利用这样的对应关系, 无论Alice的测量结果如何, 都能完成所要求的量子通讯过程, 成功的概率为1.0。

下面我们以原子1、3为例, 介绍如何间接地实现Bell基测量。

Alice对原子3实施 $|1\rangle \rightarrow i|1\rangle$ 变换, 则,

$$\begin{aligned} |\phi^\pm\rangle_{13} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm i|11\rangle)_{13}, \\ |\psi^\pm\rangle_{13} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(i|01\rangle \pm |10\rangle)_{13}. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

再让原子1、3按(3.3.32)式演化, 将Bell基变成对应的非纠缠态,

$$|\phi^+\rangle_{13} \rightarrow |00\rangle_{13}, \quad |\phi^-\rangle_{13} \rightarrow -i|11\rangle_{13}, \quad |\psi^+\rangle_{13} \rightarrow |10\rangle_{13}, \quad |\psi^-\rangle_{13} \rightarrow i|10\rangle_{13}. \quad (4.3.25)$$

对原子2、6施相同的操作。经过上述操作, 施加在两原子对上的Bell基测量, 等价于在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 下, 分别施加在四个原子上的单粒子Von Nuemman测量。

下面我们以原子(4, 5)为例, 介绍一下如何实现(4.3.21)式的变换。首先, 对原子5进行 $|1\rangle \rightarrow i|1\rangle$ 变换, 两原子的纠缠态将变成,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{45} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|01\rangle)_{45}, \quad (4.3.26a)$$

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle \quad (4.3.26b)$$

再将两原子同时注入第3.3.1节所描述的大失谐腔场中, 据(3.3.13)式, 如果取相互作用时间满足 $\lambda t = \frac{\pi}{4}$ , 使两原子按下面的规律进行演化,

$$|01\rangle_{45} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - i|10\rangle)_{45}, \quad (4.3.27a)$$

$$|10\rangle_{45} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - i|01\rangle)_{45}, \quad (4.3.27b)$$

$$|00\rangle_{45} \rightarrow |00\rangle_{45}. \quad (4.3.27c)$$

于是我们可得到(4.3.21)式所要求的演化规律。

### 4.3.3 多体类-W态实现确定的多体受控量子隐形传态(一)

假设Alice有 $n$ 个客户, 她想把某一个两粒子未知量子态发送给 $n$ 个客户中一位, 并且这一信息传送过程要受到客户网络中其他 $n-1$ 位客户的控制。

承载未知量子态的两原子仍记为原子1和原子2, 我们事先制备两个非对称的类-W态,

$$|\chi\rangle_{\{2j+1\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_3 |\varphi\rangle_{\{2k+3\}} + |0\rangle_3 |\chi\rangle_{\{2k+3\}}), \quad (4.3.28a)$$

$$|\chi\rangle_{\{2j+2\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_4 |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + |0\rangle_4 |\chi\rangle_{\{2k+4\}}), \quad (4.3.28b)$$

式中,

$$\begin{aligned} |\chi\rangle_{\{2k+3\}} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1_5 0_7 \cdots 0_{2n+3}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} [ |0_5 1_7 \cdots 0_{2n+3}\rangle + \cdots \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} ( |0_5 \cdots 1_{2n+1} 0_{2n+3}\rangle + |0_5 \cdots 0_{2n+1} 1_{2n+3}\rangle ) \} \}, \end{aligned} \quad (4.3.29a)$$

$$\begin{aligned} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1_6 0_8 \cdots 0_{2n+4}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} [ |0_6 1_8 \cdots 0_{2n+4}\rangle + \cdots \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} ( |0_6 \cdots 1_{2n+2} 0_{2n+4}\rangle + |0_6 \cdots 0_{2n+2} 1_{2n+4}\rangle ) \} \}, \end{aligned} \quad (4.3.29b)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} = |0_5 0_7 \cdots 0_{2n+3}\rangle, \quad (4.3.29c)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+4\}} = |0_6 0_8 \cdots 0_{2n+4}\rangle. \quad (4.3.29d)$$

这里,  $j, k = 1, 2, \dots, n$ ;  $\{2k+3\} = \{5, 7, \dots, 2n+3\}$  and  $\{2k+4\} = \{6, 8, \dots, 2n+4\}$ 。Alice拥有原子1、2、3、4, 将原子对 $(2k+3, 2k+4)$ 分发给第 $k$ 个客户。由这 $2n+4$ 个原子所构成的系统的初态为,

$$|\psi\rangle_{tot} = |\psi\rangle_{1,2} \otimes |\chi\rangle_{\{2j+1\}} \otimes |\chi\rangle_{\{2j+2\}}. \quad (4.3.30)$$

$|\psi\rangle_{12}$ 是(4.1.1)式表示的两原子任意态。我们将系统的初态用Bell基 $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle)$

and  $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ 展开,

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{tot} = \frac{1}{4} [ & |\phi^\pm\rangle_{1,3} |\phi^\pm\rangle_{2,4} (a|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{24} b|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} \\
 & + \gamma_{13} c|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{13}\gamma_{24} d|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}}) \\
 & + |\psi^\pm\rangle_{1,3} |\psi^\pm\rangle_{2,4} (a|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{24} b|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} \\
 & + \gamma_{13} c|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{13}\gamma_{24} d|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}}) \\
 & + |\phi^\gamma\rangle_{1,3} |\psi^\pm\rangle_{2,4} (a|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{24} b|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} \\
 & + \gamma_{13} c|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{13}\gamma_{24} d|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}}) \\
 & + |\phi^\pm\rangle_{1,3} |\phi^\pm\rangle_{2,4} (a|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{24} b|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} \\
 & + \gamma_{13} c|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{13}\gamma_{24} d|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}}) ], \quad (4.3.31)
 \end{aligned}$$

式中的 $\gamma_{ij} = \pm 1$ 与原子对 $(i, j)$ 的Bell态上标符号 $\pm$ 相对应。了为规避直接的Bell基测量,利用腔QED技术,Alice让原子对 $(1, 3)$ 和 $(2, 4)$ 的Bell态分别按(4.3.25)式演化成四个非纠缠的单粒子直积态。

然后,Alice在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基矢下,分别对其拥有的四个粒子进行单粒子测量,然后用4cbits的经典信息将测量结果告诉Bob(假设Bob是第一个客户,他拥有原子5、6)。假设Alice的测量结果为 $|1_1 1_3 0_2 0_4\rangle$ ,测量后,对应的系统坍缩态为,

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{5,6,\dots,2n+4} = & a|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + b|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} \\
 & - c|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} - d|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}}. \quad (4.3.32)
 \end{aligned}$$

由(4.3.32)式,我们可以看出,经过上述的一系列操作后,Alice要发送的目标量子态被所有的客户共享,但任何一个人都不能通过局域操作获得全部信息。如果Bob要想将目标态完全制备在他所拥有的两个原子上,必须得到其他 $n-1$ 个客户的认可,并同意将其拥有的粒子发送给Bob。此时,Bob拥有 $2n$ 个粒子,并对这 $2n$ 个粒子实施如下操作,

$$|\chi\rangle_{\{2k+3\}} \rightarrow |1_5 0_7 \cdots 0_{2n+3}\rangle, \quad (4.3.33a)$$

$$|\chi\rangle_{\{2k+4\}} \rightarrow |1_6 0_8 \cdots 0_{2n+4}\rangle, \quad (4.3.33b)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} \rightarrow |0_5 0_7 \cdots 0_{2n+3}\rangle, \quad (4.3.33c)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+4\}} \rightarrow |0_6 0_8 \cdots 0_{2n+4}\rangle. \quad (4.3.33d)$$

将(4.3.32)变为,

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{5,6,\dots,2n+4} \rightarrow & (a|1_5 1_6\rangle + b|1_5 0_6\rangle - c|0_5 1_6\rangle \\
 & - d|0_5 0_6\rangle) |0_7 0_8 \cdots 0_{2n+3} 0_{2n+4}\rangle. \quad (4.3.34)
 \end{aligned}$$

最后, Bob据Alice的测量结果, 分别对原子5、6施以 $i\sigma_y$ 和 $\sigma_x$ , 完成整个信息传递过程。如果信道中没有噪声, 该方案成功概率为1.0。

针对Alice的不同测量结果, Bob要实施不同的单粒子操作, 对应关系如下:

$$\begin{aligned} |00\rangle_{13} &\longrightarrow i\sigma_y^5, & |01\rangle_{13} &\longrightarrow I^5, & |10\rangle_{13} &\longrightarrow \sigma_z^5, & |11\rangle_{13} &\longrightarrow \sigma_x^5, \\ |00\rangle_{24} &\longrightarrow i\sigma_y^6, & |01\rangle_{24} &\longrightarrow I^6, & |10\rangle_{24} &\longrightarrow \sigma_z^6, & |11\rangle_{24} &\longrightarrow \sigma_x^6. \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

下面介绍如何实现(4.3.33)式所表示的么正变换, 我们以 $n = 3$ 为例。

$$|\chi\rangle_{\{2k+3\}} \rightarrow |\chi\rangle_{5,7,9} = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |1_5 0_7 0_9\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0_5\rangle ( |1_7 0_9\rangle + |0_7 1_9\rangle ) ], \quad (4.3.36a)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} \rightarrow |\varphi\rangle_{5,7,9} = |0_5 0_7 0_9\rangle. \quad (4.3.36b)$$

首先, 让原子7、9按(4.3.21)式进行演化,

$$|\chi\rangle_{5,7,9} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} ( |1_5 0_7\rangle + |0_5 1_7\rangle ) |0_9\rangle, \quad (4.3.37)$$

$$|\varphi\rangle_{5,7,9} \rightarrow |0_5 0_7 0_9\rangle. \quad (4.3.38)$$

再让原子5、7按(4.3.21)式进行演化, 则可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [ |1_5 0_7 0_9\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0_5\rangle ( |1_7 0_9\rangle + |0_7 1_9\rangle ) ] \rightarrow |1_5 0_7 0_9\rangle \quad (4.3.39)$$

$$|0_5 0_7 0_9\rangle \rightarrow |0_5 0_7 0_9\rangle. \quad (4.3.40)$$

同理, 如果 $n$ 是任意正整数, 陆续将编号为“ $k$ ”和“ $(k-1)$ ” ( $k = n, n-1, \dots, 2$ )两原子按(4.3.21)式进行演化, 最后我们可以得到如下的演化过程,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1_5 0_7 \dots 0_{2n+3}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} [ |0_5 1_7 \dots 0_{2n+3}\rangle + \dots + |0_5 0_7 \dots 0_{2n-1}\rangle \\ &\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} ( |1_{2n+1} 0_{2n+3}\rangle + |0_{2n+1} 1_{2n+3}\rangle ) ] \} \rightarrow |1_5 0_7 \dots 0_{2n+3}\rangle \end{aligned} \quad (4.3.41a)$$

$$|0_5 0_7 \dots 0_{2n+3}\rangle \rightarrow |0_5 0_7 \dots 0_{2n+3}\rangle \quad (4.3.41b)$$

即(4.3.33)式所要求的么正变换。

#### 4.3.4 多体类-W态实现确定的多体受控量子隐形传态(二)

在上节的问题中, 如果Alice与她 $n$ 个客户之间的量子通道是另外一种形式的多体类-W态,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\{2j+1\}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ( |1\rangle_3 |\varphi\rangle_{\{2k+3\}} + |0\rangle_3 |\chi\rangle_{\{2k+3\}} ), \\ |\psi\rangle_{\{2j+2\}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} ( |1\rangle_4 |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + |0\rangle_4 |\chi\rangle_{\{2k+4\}} ), \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

式中,

$$|\chi\rangle_{\{2k+3\}} = \frac{1}{\sqrt{n}} (|1_5 0_7 0_9 \cdots 0_{2n+3}\rangle + |0_5 1_7 0_9 \cdots 0_{2n+3}\rangle + \cdots + |0_5 0_7 0_9 \cdots 1_{2n+3}\rangle), \quad (4.3.43a)$$

$$|\chi\rangle_{\{2k+4\}} = \frac{1}{\sqrt{n}} (|1_6 0_8 0_{10} \cdots 0_{2n+4}\rangle + |0_6 1_8 0_{10} \cdots 0_{2n+4}\rangle + \cdots + |0_6 0_8 0_{10} \cdots 1_{2n+4}\rangle), \quad (4.3.43b)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} = |0_5 0_7 \cdots 0_{2n+3}\rangle, \quad (4.3.43c)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+4\}} = |0_6 0_8 \cdots 0_{2n+4}\rangle, \quad (4.3.43d)$$

这里,  $j, k = 1, 2, \dots, n$ ,  $2k+3 = 5, 7, \dots, 2n+3$ ,  $2k+4 = 6, 8, \dots, 2n+4$ , Alice拥有前四个原子, 原子 $(2k+3, 2k+4)$ 分发给第 $k$ 位客户, 则全部粒子系统的量子态可表示为,

$$|\psi\rangle_{tot} = |\psi\rangle_{12} \otimes |\psi\rangle_{\{2j+1\}} \otimes |\psi\rangle_{\{2j+2\}}, \quad (4.3.44)$$

$|\psi\rangle_{12}$ 是(4.1.1)式表示的两原子任意态。用原子对 $(1, 3)$ 和 $(2, 4)$ 的Bell基将系统量子态展开,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{tot} = & \frac{1}{4} [|\phi^\pm\rangle_{1,3} |\phi^\pm\rangle_{2,4} (a|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{2,4} b|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} \\ & + \gamma_{1,3} c|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{1,3}\gamma_{2,4} d|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}}) \\ & + |\psi^\pm\rangle_{1,3} |\psi^\pm\rangle_{2,4} (a|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{2,4} b|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} \\ & + \gamma_{1,3} c|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{1,3}\gamma_{2,4} d|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}}) \\ & + |\phi^\pm\rangle_{1,3} |\psi^\pm\rangle_{2,4} (a|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{2,4} b|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} \\ & + \gamma_{1,3} c|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{1,3}\gamma_{2,4} d|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}}) \\ & + |\phi^\pm\rangle_{1,3} |\phi^\pm\rangle_{2,4} (a|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{2,4} b|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}} \\ & + \gamma_{1,3} c|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\chi\rangle_{\{2k+4\}} + \gamma_{1,3}\gamma_{2,4} d|\chi\rangle_{\{2k+3\}} |\varphi\rangle_{\{2k+4\}})], \quad (4.3.45) \end{aligned}$$

$\gamma_{i,j} = \pm 1$ 对应Bell基 $\phi_{i,j}^\pm$ 或 $\psi_{i,j}^\pm$ 的上标符号。

利用腔QED技术将Bell基转化成非纠缠态,

$$|\phi^+\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad |\phi^-\rangle \rightarrow -i|11\rangle, \quad |\psi^+\rangle \rightarrow |10\rangle, \quad |\psi^-\rangle \rightarrow i|10\rangle. \quad (4.3.46)$$

Alice对其拥有的四个粒子分别实施单粒子测量, 测量结果一定是四粒子16个基矢 $\{|0000\rangle, |0001\rangle, \dots, |1111\rangle\}$ 中的一个, 而且每一种结果出现的概率均为 $\frac{1}{16}$ 。假设测

量结果为 $|0_1 0_3 1_2 1_4\rangle$ ，则系统对应的塌缩态为，

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{5,6,\dots,2n+4} = & a|\chi\rangle_{\{2k+3\}}|\chi\rangle_{\{2k+4\}} \\ & - b|\chi\rangle_{\{2k+3\}}|\varphi\rangle_{\{2k+4\}} \\ & + c|\varphi\rangle_{\{2k+3\}}|\chi\rangle_{\{2k+4\}} \\ & - d|\varphi\rangle_{\{2k+3\}}|\varphi\rangle_{\{2k+4\}}. \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

(4.3.47)式是 $n$ 个客户所拥有粒子的一个纠缠态，即Alice要发送的量子信息被 $n$ 个客户共享，但每一个都不可能通过局域操作获得全部信息。如果Bob是最终的信息接收者，Alice需将她的测量结果通过经典信道告诉Bob，而且需争得其他 $n-1$ 位客户同意，并配合将其拥有的全部粒子发送给Bob。要想将(4.3.47)式所承载的全部信息完全制备在两原子态上，Bob必须实施如下的操作，

$$|\chi\rangle_{\{2k+3\}} \rightarrow |1_5 0_7 \cdots 0_{2n+3}\rangle, \quad (4.3.48a)$$

$$|\chi\rangle_{\{2k+4\}} \rightarrow |1_6 0_8 \cdots 0_{2n+4}\rangle, \quad (4.3.48b)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+3\}} \rightarrow |0_5 0_7 \cdots 0_{2n+3}\rangle, \quad (4.3.48c)$$

$$|\varphi\rangle_{\{2k+4\}} \rightarrow |0_6 0_8 \cdots 0_{2n+4}\rangle. \quad (4.3.48d)$$

该操作的形式与(4.3.33)相似，但实现过程不同，稍后我们介绍如何实现这一么正变换过程。经过上述变换，(4.3.47)变成如下形式，

$$|\psi\rangle_{5,6,\dots,2n+4} \rightarrow (a|1_5 1_6\rangle - b|1_5 0_6\rangle + c|0_5 1_6\rangle - d|0_5 0_6\rangle) |0_7 0_8 \cdots 0_{2n+3} 0_{2n+4}\rangle. \quad (4.3.49)$$

Bob再据Alice的测结果，只要对原子5、6分别实施 $\sigma_x$ 和 $i\sigma_y$ 操作，即可将目标态成功地制备在他所拥有的原子上，完成这一量子通讯过程。针对Alice不同的测量结果，Bob需要实施不同的单粒子操作，对应关系与(4.3.35)式相同。

下面介绍如何实现(4.3.48)式所示的么正变换过程。为叙述方便，我们将(4.3.48)式中 $|\chi\rangle_{\{2k+3\}}$ 和 $|\varphi\rangle_{\{2k+3\}}$ 改写成下面的形式，

$$\chi_{\{j\}} = \frac{1}{\sqrt{n}}(|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + |0_1 1_2 0_3 \cdots 0_n\rangle + \cdots + |0_1 0_2 \cdots 0_{n-1} 1_n\rangle), \quad (4.3.50a)$$

$$\varphi_{\{j\}} = |0_1 0_2 \cdots 0_n\rangle. \quad (4.3.50b)$$

式中的 $\{j\} = 1, 2, \dots, n$ 表示粒子序列。

首先,对最后一个粒子施加 $|1\rangle \rightarrow i|1\rangle$ 操作,则粒子系统的量子态变为,

$$\chi_{\{j\}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}[|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + |0_1 1_2 \cdots 0_n\rangle + \cdots + |0_1 0_2 \cdots 0_{n-2}\rangle(|1_{n-1} 0_n + i 0_{n-1} 1_n\rangle)]. \quad (4.3.51)$$

$|\varphi\rangle_{\{j\}}$ 保持不变。

将最后两个原子同时注入大失谐腔场中,据(3.3.13)式的演化规律,如取原子与光场相互作用时间满足 $\cos \lambda t_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,对应的系统量子态演化规律为,

$$\chi_{\{j\}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}[|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + \cdots + |0_1 0_2 \cdots 0_{n-3}\rangle(|1_{n-2} 0_{n-1}\rangle + \sqrt{2}|0_{n-2} 1_{n-1}\rangle)|0_n\rangle]. \quad (4.3.52)$$

再对第 $n-1$ 个原子施以 $|1\rangle \rightarrow i|1\rangle$ 么正操作后,将编号为 $n-2$ 和 $n-1$ 两原子同时通过上述腔场中,取相互作用时间满足 $\cos \lambda t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,测系统量子态进一步演化为,

$$\chi_{\{j\}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}[|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + \cdots + |0_1 0_2 \cdots 0_{n-4}\rangle(|1_{n-3} 0_{n-2}\rangle + \sqrt{3}|0_{n-3} 1_{n-2}\rangle)|0_{n-1} 0_n\rangle]. \quad (4.3.53)$$

陆续对编号为 $k$ 和 $k-1$ 的原子( $k = n-2, n-2, \dots, 2$ )采取相同的操作,并取相互作用时间满足 $\cos \lambda t k = \frac{1}{\sqrt{n-k+2}}$ ,量子态 $\chi_{\{j\}}$ 最终演化为,

$$\chi_{\{j\}} \rightarrow |1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle, \quad (4.3.54)$$

而在这一过程中,量子态 $|\varphi\rangle_{\{j\}}$ 一直保持不变。这正是(4.3.48)式所要求的演化过程。

上面所讨论的通信过程中,Alice是信息的发送者,她的客户做为信息的接收者,借助于腔QED技术,可以实现确定的隐形传态过程;但如果反过来,Alice的某一个客户做为信息的发送方,其它的人做为信息的接受方,能否实现确定的隐形传态过程?下面我们加以讨论。

#### 4.3.5 多体类-W态实现受控概率传态

我们假设Alice有 $n$ 个客户,记为 $Bob_k (k = 1, 2, \dots, n)$ , $Bob_k$ 要把一个未知单粒子态 $|\phi\rangle_{k'} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_{k'}$ 发送给网络中任意客户 $Bob_j$ ,要求粒子 $k'$ 一直留在 $Bob_k$ 处,根据他们之间共享纠缠态的不同,我们分别加以分析。

##### 1、共享量子态是第一种非对称类-W态

假设他们共享的量子通道具有如下形式:

$$|\psi\rangle_{\{l\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |1_0 0_1 \cdots 0_n\rangle + \frac{1}{\sqrt{n}} |0_0\rangle (|1_1 0_2 \cdots 0_n\rangle + |0_1 1_2 \cdots 0_n\rangle + \cdots + |0_1 0_2 \cdots 1_n\rangle) \right] \quad (4.3.55)$$

这是第一种非对称类-W态, 式中 $\{l\} = 0, 1, 2, \cdots, n$ 表示原子序列, 式中的原子0分发给Alice, 让 $Bob_k$ 拥有原子 $k$ 。

如果用传统的量子通讯方案, 按第4.3.1节的分析, 只能实现概率传态。由于该纠缠态中, 只有两种系数 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ , 很显然,  $|\frac{1}{\sqrt{2}}| > |\frac{1}{\sqrt{2n}}|$ , 所以, 无论谁为信息的发送者, 该过程的成功概率均为 $2 \times |\frac{1}{\sqrt{2n}}|^2 = \frac{1}{n}$ 。

而利用腔QED技术, 如果Alice做为信息的发送者, 我们已经分析了, 这一通讯过程的成功概率为1.0。如果 $Bob_k$ 做为信息的发送者, 是否也能实现确定的隐形传态过程。

首先, 将上式改写为,

$$|\psi\rangle_{\{l\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_k |\varphi\rangle + |0\rangle_k |\chi\rangle) \quad (4.3.56)$$

式中,

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} |00 \cdots 0\rangle_{012 \cdots k-1k+1 \cdots n}, \quad (4.3.57a)$$

$$|\chi\rangle = \left[ |10 \cdots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{n}} |0\rangle (|10 \cdots 0\rangle + |01 \cdots 0\rangle + \cdots + |00 \cdots 01\rangle) \right]_{012 \cdots k-1k+1 \cdots n} \quad (4.3.57b)$$

则所有粒子构成的量子体系的量子态为,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{tot} &= |\phi\rangle_{k'} \otimes |\psi\rangle_{\{l\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |\chi\rangle |00\rangle_{k'k} + \alpha |\varphi\rangle |01\rangle_{k'k} + \beta |\chi\rangle |10\rangle_{k'k} + \beta |\varphi\rangle |11\rangle_{k'k}). \end{aligned} \quad (4.3.58)$$

再用原子对 $(k', k)$ 的Bell基将上式展开,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{tot} &= \frac{1}{2} [|\phi^+\rangle_{k'k} (\alpha |\chi\rangle + \beta |\varphi\rangle) + |\phi^-\rangle_{k'k} (\alpha |\chi\rangle - \beta |\varphi\rangle) \\ &\quad + |\psi^+\rangle_{k'k} (\alpha |\varphi\rangle + \beta |\chi\rangle) + |\psi^-\rangle_{k'k} (\alpha |\varphi\rangle - \beta |\chi\rangle)]. \end{aligned} \quad (4.3.59)$$

$Bob_k$ 对其拥有的两原子 $(k', k)$ 实施Bell基测量(前面已讨论了如何间接实现Bell基测量), 有四种可能的测量结果 $|\phi^\pm\rangle_{k'k}$ 和 $|\psi^\pm\rangle_{k'k}$ , 对应于每一种测量结果出现的概率不完相同, 如果测量结果为 $|\phi^+\rangle_{k'k}$ , 对应此结果出现概率为,

$$P_1 = \frac{1}{4} (|\alpha|^2 |\chi\rangle|^2 + |\beta|^2 |\varphi\rangle|^2). \quad (4.3.60)$$

对应的其余粒子坍缩态为,

$$|\psi\rangle_{\{l \neq k\}} = \frac{\alpha|\chi\rangle + \beta|\varphi\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2}}. \quad (4.3.61)$$

如果所有客户同意将信息发送给Alice,并将各自拥有的粒子发送给她。如果量子系统中的所有粒子为两能级原子,Alice陆续将原子(编号为"0"原子除外)放入大失谐腔场中,根据第4.3.4节的讨论,我们可以实现下面的演化过程,

$$|00 \cdots 0\rangle_{12 \cdots k-1k+1 \cdots n} \longrightarrow |00 \cdots 0\rangle_{12 \cdots k-1k+1 \cdots n}, \quad (4.3.62a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (|10 \cdots 0\rangle + |01 \cdots 0\rangle + \cdots + |00 \cdots 01\rangle)_{12 \cdots k-1k+1 \cdots n} \longrightarrow \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} |10 \cdots 0\rangle_{12 \cdots k-1k+1 \cdots n}. \quad (4.3.62b)$$

相应地,  $|\varphi\rangle$ 和 $|\chi\rangle$ 演化为,

$$|\varphi\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} |00\rangle_{01} |0 \cdots 0\rangle_{2 \cdots k-1k+1 \cdots n}, \quad (4.3.63a)$$

$$|\chi\rangle \longrightarrow \left( |10\rangle + \sqrt{\frac{n-1}{n}} |01\rangle \right)_{01} |00 \cdots 0\rangle_{2 \cdots k-1k+1 \cdots n}. \quad (4.3.63b)$$

Alice对原子1实施 $|1\rangle_1 \rightarrow i|1\rangle_1$ 操作,则

$$|\chi\rangle \longrightarrow \left( |10\rangle + i\sqrt{\frac{n-1}{n}} |01\rangle \right)_{01} |00 \cdots 0\rangle_{2 \cdots k-1k+1 \cdots n}. \quad (4.3.64)$$

再将原子0、1放入大失谐腔场中,设 $a = \frac{n-1}{n}$ ,取相互作用时间 $t$ 满足 $\cos(\lambda t) = \frac{1}{\sqrt{a+1}}$ ,据(3.3.13)式,则两原子将按下面的规律进行演化,

$$|00\rangle_{01} \longrightarrow |00\rangle_{01}, \quad (4.3.65a)$$

$$|01\rangle_{01} \longrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{a+1}} |01\rangle - i\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} |10\rangle \right)_{01}, \quad (4.3.65b)$$

$$|10\rangle_{01} \longrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{a+1}} |10\rangle - i\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} |01\rangle \right)_{01}. \quad (4.3.65c)$$

所以,有

$$\left( |10\rangle + i\sqrt{\frac{n-1}{n}} |01\rangle \right)_{01} = (|10\rangle + i\sqrt{a} |01\rangle)_{01} \implies \sqrt{a+1} |10\rangle_{01} = \sqrt{\frac{2n-1}{n}} |10\rangle_{01}. \quad (4.3.66)$$

由此可得,

$$|\varphi\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}|0\rangle_0|0\dots 0\rangle_{12\dots k-1k+1\dots n}, \quad (4.3.67a)$$

$$|\chi\rangle \longrightarrow \sqrt{\frac{2n-1}{n}}|1\rangle_0|00\dots 0\rangle_{12\dots k-1k+1\dots n}. \quad (4.3.67b)$$

则(4.3.61)式变为,

$$|\psi\rangle_{\{l \neq k\}} = \frac{\alpha\sqrt{\frac{2n-1}{n}}|1\rangle_0 + \beta\frac{1}{\sqrt{n}}|0\rangle_0}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2}}|00\dots 0\rangle_{123\dots k-1k+1\dots n}. \quad (4.3.68)$$

经过原子与腔场之间的相互作用,原子序列 $\{123\dots k-1k+1\dots n\}$ 已从(4.3.61)式的纠缠态中分离出来.为表达方便,令 $b = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $c = \sqrt{\frac{2n-1}{n}}$ ,很显然,  $|b| < |c|$ ,由(4.3.68)式,我们将原子0的量子态表示为,

$$|\psi\rangle_0 = \frac{\alpha c|1\rangle_0 + \beta b|0\rangle_0}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2}}. \quad (4.3.69)$$

为了将目标制备在原子0上,需要引入一个辅助原子 $|0\rangle_a$ ,在基矢 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}_{0a}$ 下,对两原子实施下面的么正操作,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{1-\frac{b^2}{c^2}} & \frac{b}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{c} & \sqrt{1-\frac{b^2}{c^2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.70)$$

则,

$$\frac{\alpha c|1\rangle_0 + \beta b|0\rangle_0}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2}}|0\rangle_a \xrightarrow{U} \frac{b(\beta|0\rangle_0 + \alpha|1\rangle_0)|0\rangle_a + \alpha c\sqrt{1-\frac{b^2}{c^2}}|1\rangle_0|1\rangle_a}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2}}. \quad (4.3.71)$$

Alice在基矢 $\{|0\rangle, |1\rangle\}_a$ 下,对辅助原子实施投影测量,测量结果为 $|0\rangle_a$ 的概率为,

$$P_2 = \frac{b^2}{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2}. \quad (4.3.72)$$

原子0的量子态变为,

$$|\phi\rangle_0 = (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)_0. \quad (4.3.73)$$

再对其实施 $\sigma_x$ 单粒子操作,即可将目标态制备在原子0上,这一过程的成功概率为,

$$P = P_1 P_2 = \frac{1}{4}(|\alpha|^2|\chi|^2 + |\beta|^2|\varphi|^2) \cdot \frac{b^2}{|\alpha|^2|\chi|^2 + |\beta|^2|\varphi|^2} = \frac{|b|^2}{4} = \frac{1}{4n}. \quad (4.3.74)$$

其它3种Bell基测量结果也可以用相同的方法使原子0转变为目标态,成功概率均为 $\frac{1}{4n}$ 。所以,这一通讯过程成功的总概率为 $4 \times \frac{1}{4n} = \frac{1}{n}$ ,与传统方法的成功概率一致。如果信息接收者不是Alice而是网络中其他客户Bob<sub>j</sub>,我们同样可以证明,即使借助于腔QED技术,这一隐形传态过程也只能是概率传态,成功概率均为 $\frac{1}{n}$ 。也就是说,如果以第一种非对称类-W态作为量子通道,Alice任何一个客户为信息的发送者,都只能实现概率传态,成功概率与客户个体无关,仅与网络中客户人数有关,人数越多,发送量子信息成功概率越小。

## 2、共享量子态是第二种非对称类-W态

假设通讯网络中,Alice和她的n个客户Bob<sub>k</sub>(k=1,2,⋯,n)共享下面的纠缠态,

$$|\psi\rangle_{\{l\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |10\cdots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |010\cdots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |0010\cdots 0\rangle + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^k}} |0\cdots 010\cdots 0\rangle \right. \\ \left. + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} |00\cdots 00\rangle (|10\rangle + |01\rangle) \right]_{012\cdots n}. \quad (4.3.75)$$

这是(3.4.11)式所示的第二种非对称类-W态。我们仍让Alice拥有原子0,原子k分发给客户Bob<sub>k</sub>。为方便起见,将上式改写为,

$$|\psi\rangle_{\{l\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_k |\varphi\rangle + |0\rangle_k |\chi\rangle), \quad (4.3.76)$$

式中,| $\varphi$ )和| $\chi$ )分别表示,

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^k}} |00\cdots 0\rangle_{012\cdots k-1k+1\cdots n}, \quad (4.3.77a)$$

$$|\chi\rangle = \left[ |10\cdots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |010\cdots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |010\cdots 0\rangle + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}} |0\cdots 010\cdots 0\rangle \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2^{k+1}}} |0\cdots 010\cdots 0\rangle + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} |00\cdots 00\rangle (|10\rangle + |01\rangle) \right]_{012\cdots k-1k+1\cdots n} \quad (4.3.77b)$$

与前面的处理类似,将(4.3.76)式用原子(k',k)的Bell基展开成(4.3.59)式的形式。Bob<sub>k</sub>对其拥有的两粒子(k',k)实施Bell基测量,有四种可能的测量结果 $\phi^\pm\rangle_{k'k}$ 和 $\psi^\pm\rangle_{k'k}$ ,对应于每一种测量结果出现的概率不完相同,如果测量结果为 $\phi^+\rangle_{k'k}$ ,对应这结果出现概率为,

$$P_1 = \frac{1}{4}(|\alpha|^2|\chi|^2 + |\beta|^2|\varphi|^2). \quad (4.3.78)$$

则其它原子量子态塌缩为,

$$|\psi\rangle_{\{l \neq k\}} = \frac{\alpha|\chi\rangle + \beta|\varphi\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2}}. \quad (4.3.79)$$

仍假设Alice为信息的接收者, 其余客户将其拥有粒子发送给Alice,  $Bob_k$ 将Bell态的测量结果通过经典信道告诉Alice, Alice要获得最终的目标态, 需将原子0 (假设量子系统中粒子均为二能级原子) 以外的原子从纠缠态(4.3.79)式中分离出来。

我们将(4.3.77)中的 $|\chi\rangle$ 改写成下面的形式,

$$|\chi\rangle = |\chi'\rangle_{012\dots k-1}|\varphi\rangle_{k+1+2\dots n} + \frac{1}{\sqrt{2^k}}|\varphi\rangle_{012\dots k-1}|\chi''\rangle_{k+1k+2\dots n}. \quad (4.3.80)$$

式中,

$$|\chi'\rangle_{012\dots k-1} = \left( |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}}|010\dots 0\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}}|0\dots 01\rangle \right)_{012\dots k-1}, \quad (4.3.81a)$$

$$|\varphi\rangle_{k+1k+2\dots n} = |00\dots 0\rangle_{k+1+2\dots n}, \quad (4.3.81b)$$

$$|\varphi\rangle_{012\dots k-1} = |00\dots 0\rangle_{k+1k+2\dots n}, \quad (4.3.81c)$$

$$|\chi''\rangle_{k+1k+2\dots n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}}|010\dots 0\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{n-k-2}}}|00\dots 00\rangle(|10\rangle + |01\rangle) \right]_{k+1k+2\dots n}. \quad (4.3.81d)$$

Alice首先将原子序列 $\{n, n-1, n-2, \dots, k+1\}$ 陆续放入大失谐腔场中演化, 据(4.3.41)式, Alice可以实现下面的量子态演化过程,

$$|\varphi\rangle_{k+1k+2\dots n} \implies |00\dots 0\rangle_{k+1k+2\dots n},$$

$$|\chi''\rangle_{k+1k+2\dots n} \implies |10\dots 0\rangle_{k+1k+2\dots n}. \quad (4.3.82a)$$

演化后, (4.3.80)式变为,

$$|\chi\rangle_{012\dots k-1k+1\dots n} \longrightarrow \left( |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}}|010\dots 0\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}}|0\dots 010\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^k}}|0\dots 01\rangle \right)_{012\dots k-1k+1} |00\dots 0\rangle_{k+2k+3\dots n} \quad (4.3.83)$$

经过原子与腔场的相互作用, 原子 $\{k+2, k+3, \dots, n\}$ 已从纠缠态中分离出来, 其余原子的量子态可表示为,

$$|\chi\rangle_{012\dots k-1k+1} = \left[ |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}}|010\dots 0\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}}|0\dots 0\rangle \left( |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle \right) \right]_{012\dots k-1k+1} \quad (4.3.84)$$

下面我们先分析两原子在大失谐腔中的一个特定的演化规律。设有两个二能级原子处于下面的非归一化的纠缠态,

$$|10\rangle + \sqrt{a}|01\rangle. \quad (4.3.85)$$

$a$ 是非负数。先让第2个原子进入一个微波腔, 实现 $|1\rangle \rightarrow i|1\rangle, |0\rangle \rightarrow |0\rangle$ 么正变换, 则

$$|10\rangle + \sqrt{a}|01\rangle \Rightarrow |10\rangle + i\sqrt{a}|01\rangle. \quad (4.3.86)$$

再让两原子同时进入单模大失谐腔场中, 调整原子运动速度, 以保证原子与场之间相互作用时间满足 $\cos\lambda t = \frac{1}{\sqrt{a+1}}$ , 由(3.3.13)式可得,

$$|01\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a+1}}|01\rangle - i\sqrt{\frac{a}{a+1}}|10\rangle, \quad (4.3.87a)$$

$$|10\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a+1}}|10\rangle - i\sqrt{\frac{a}{a+1}}|01\rangle. \quad (4.3.87b)$$

由此, 可将(4.3.86)式进一步演化为,

$$|10\rangle + \sqrt{a}|01\rangle \rightarrow |10\rangle + i\sqrt{a}|01\rangle \Rightarrow \sqrt{a+1}|10\rangle. \quad (4.3.88)$$

而 $|00\rangle$ 态始终保持不变。

Alice让原子对 $(k-1, k+1)$ 进入腔场, 按(4.3.88)式演化, 则

$$|\chi\rangle_{012\dots k-1k+1} \rightarrow \left[ |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}}|010\dots 0\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}}|0\dots 0\rangle \sqrt{\frac{1}{2}+1}|10\rangle \right]_{012\dots k-1k+1} \quad (4.3.89)$$

进一步将上式整理为,

$$|\chi\rangle_{012\dots k-1k+1} \rightarrow \left[ |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}}|010\dots 0\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^{k-2}}}|0\dots 0\rangle \left( |10\rangle + \sqrt{\frac{1+2}{2^2}}|01\rangle \right) |0\rangle \right]_{012\dots k-1k+1} \quad (4.3.90)$$

再让原子对 \$(k-2, k-1)\$ 进入腔场, 按(4.3.88)式演化, 则

$$\begin{aligned}
 |\chi\rangle_{012\dots k-1k+1} &\longrightarrow \left[ |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}}|010\dots 0\rangle + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2^{k-2}}}|0\dots 0\rangle \sqrt{\frac{1+2}{2^2} + 1} |100\rangle \right]_{012\dots k-1k+1} \\
 &= \left[ |10\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|010\dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}}|010\dots 0\rangle + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2^{k-3}}}|0\dots 0\rangle \left( |10\rangle + \sqrt{\frac{1+2+2^2}{2^3}}|01\rangle \right) |00\rangle \right]_{012\dots k-1k+1} \quad (4.3.91)
 \end{aligned}$$

陆续让原子对 \$(j-1, j)\$ 进入腔场, 按(4.3.88)式演化, (4.3.84)式变为,

$$\begin{aligned}
 |\chi\rangle_{012\dots k-1k+1} &\longrightarrow \sqrt{\frac{1+2+2^2+\dots+2^k}{2^k}} |10\dots 0\rangle_{012\dots k-1k+1} \\
 &= \sqrt{\frac{2^{k+1}-1}{2^k}} |10\dots 0\rangle_{012\dots k-1k+1}. \quad (4.3.92)
 \end{aligned}$$

而在这一系列演化过程中, \$|\varphi\rangle\$ 始终保持不变, 最后, (4.3.77)式演化为,

$$|\varphi\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^k}} |00\dots 0\rangle_{012\dots k-1k+1\dots n}, \quad (4.3.93a)$$

$$|\chi\rangle \longrightarrow \sqrt{\frac{2^{k+1}-1}{2^k}} |10\dots 0\rangle_{012\dots k-1k+1\dots n}. \quad (4.3.93b)$$

经过原子与腔场之间的相互作用, 除去原子0以外, 其它原子已完全从(4.3.79)式纠缠态中分离出来, 此时, 原子0的量子态为

$$|\psi\rangle_0 = \frac{\left( \alpha \sqrt{\frac{2^{k+1}-1}{2^k}} |1\rangle_0 + \beta \frac{1}{\sqrt{2^k}} |0\rangle_0 \right)}{\sqrt{|\alpha|^2 |\chi|^2 + |\beta|^2 |\varphi|^2}}. \quad (4.3.94)$$

令 \$b = \frac{1}{\sqrt{2^k}}, c = \sqrt{\frac{2^{k+1}-1}{2^k}}\$, 则 \$|b| < |c|\$, 引入辅助粒子 \$|0\rangle\_a\$, 在基矢 \$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}\_{0a}\$ 下, 对辅助原子a和原子0实施形如(4.3.70)式的么正变换, 于是可得,

$$\frac{\alpha c |1\rangle_0 + \beta b |0\rangle_0}{\sqrt{|\alpha|^2 |\chi|^2 + |\beta|^2 |\varphi|^2}} |0\rangle_a \implies \frac{b(\beta |0\rangle_0 + \alpha |1\rangle_0) |0\rangle_a + \alpha c \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} |1\rangle_0 |1\rangle_a}{\sqrt{|\alpha|^2 |\chi|^2 + |\beta|^2 |\varphi|^2}}. \quad (4.3.95)$$

对辅助原子实施投影测量, 测量结果为 $|0\rangle_a$ 的概率为,

$$P_2 = \frac{b^2}{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2}. \quad (4.3.96)$$

原子0的量子态变为,

$$|\phi\rangle_0 = (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)_0. \quad (4.3.97)$$

再对其实施 $\sigma_x$ 单粒子操作, 即可将目标态制备在原子0上, 这一过程的成功概率为,

$$P = P_1 P_2 = \frac{1}{4}(|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2) \cdot \frac{b^2}{|\alpha|^2|\chi\rangle|^2 + |\beta|^2|\varphi\rangle|^2} = \frac{|b|^2}{4}. \quad (4.3.98)$$

其它3种Bell基测量结果也可以用相同的方法使原子0转变为目标态, 成功概率均为 $\frac{|b|^2}{4}$ 。所以, 这通讯过程成功的概率为 $4 \times \frac{|b|^2}{4} = \frac{|b|^2}{1}$ 。如果信息接收不是Alice而是网络中其他客户Bob<sub>j</sub>, 我们同样可以证明, 即使借助于腔QED技术, 这一隐形传态过程也只能是概率传态, 成功概率均为 $\frac{1}{2k}$ 。也就是说, 如果以第二种非对称类-W态作为量子通道, Alice的任何一个客户做信息的发送者, 都只能实现概率传态, 成功概率与客户个体有关, 与通讯网络中人数无关, 随着k的增大, 发送量子信息的成功概率越小。

无论是用哪一种类-W态做为量子通道, 任意两者之间通信都受到其他客户的控制, 所以, 这是一个受控概率传态过程。

#### 4.3.6 小结

本节首先讨论了借助于传统方法, 利用多体任意W态为量子通道只能实现量子态概率传态的方案, 并给出成功概率的定量表达式; 然后, 提出借助于腔QED技术, 利用两种非对称类-W态进行确定的受控量子隐形传态方案。在这一方案中, 要成功地实现双方通讯过程, 必须同时满足以下三个条件: (1) 通讯双方间纠缠是最大纠缠; (2) 需要通讯网络上所有用户的配合; (3) 每一位用户都能实现形如(4.3.33)式和(4.3.48)式的么正变换过程。由第3章分析可知, 在这两种纠缠态中, 无论Alice有多少客户, 她与它的客户间的纠缠总是最大纠缠, 所以, 只要条件(2)、(3)满足, 借助于腔QED技术, Alice与所有客户之间都可以成功实现量子通讯过程。但某一个客户Bob<sub>k</sub>与其它个体之间纠缠是非最大纠缠, 所以, 在该通信网络中, 如以Alice的任何一个客户为信息的发送者, 都不可能实现确定的信息传递过程, 即信息传送成功均小于1.0。如果Alice与客户共享的是第一种类-W态, 网络中客户人数越多, 客户间进行信息传递的成功概率越小; 如果Alice与客户共享的是第二种类-W态, 每一位客户在该网络中地位是不同的, 不同的客户做为

信息的发送者, 信息成功传送的概率是单调递减, 但每次的成功概率仍是小于1.0的。总之, 利用这种非对称类W-态做为量子通道, 能够实现信息的单向传递, 而且, 信息的传输过程受到网络一个或多个客户的控制, 进一步保证了通讯过程的安全性。

#### 4.4 利用腔QED理论实现确定隐形传态的纠缠态特点

从上面的讨论中, 我们可以看到, 同样一个多体纠缠态做为量子通道, 借助于腔QED技术, 有时可以实现确定的隐形传态, 有时却只能实现概率传态。下面我们总结一下什么样的纠缠态可能实现确定的隐形传态。

任何一个多体纠缠态都可以写成下面的形式,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_k |\varphi\rangle_{\{j\}} + |0\rangle_k |\chi\rangle_{\{j\}}). \quad (4.4.1)$$

并且一定有

$$\frac{|\chi\rangle_{\{j\}}|^2}{2} + \frac{|\varphi\rangle_{\{j\}}|^2}{2} = 1 \quad (4.4.2)$$

$\{j\}$ 表示不包含粒子 $k$ 的粒子序列 $\{j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ ,  $|\varphi\rangle_{\{j\}}$ 和 $|\chi\rangle_{\{j\}}$ 是相互正交的。粒子 $k$ 被信息的发送者Alice所拥有, 其它粒子属于信息的接收者Bob (也可以分发给不同的客户, 以实现受控信息传递过程)。以这样一个纠缠态为量子通道, 以实现确定的单粒子隐形传态的条件是:  $|\varphi\rangle_{\{j\}}$ 和 $|\chi\rangle_{\{j\}}$ 一定满足下面的条件,

$$|\varphi\rangle_{\{j\}} = |\chi\rangle_{\{j\}} = 1. \quad (4.4.3)$$

下面我们做一个简单分析。

假设未知量子态为 $|\phi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_k$ , 由所有粒子构成的系统量子态用粒子对 $(k', k)$ bell基展开成(4.3.59)式, 然后实施Bell基测量, 测量结果为 $|\phi^+\rangle_{k'k}$ 的概率为,

$$P_1 = \frac{1}{4}(|\alpha|^2 |\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2 |\varphi\rangle_{\{j\}}|^2). \quad (4.4.4)$$

系统的塌缩态为,

$$|\psi\rangle_{\{j\}} = \frac{\alpha|\chi\rangle_{\{j\}} + \beta|\varphi\rangle_{\{j\}}}{\sqrt{|\alpha|^2 |\chi\rangle_{\{j\}}|^2 + |\beta|^2 |\varphi\rangle_{\{j\}}|^2}}. \quad (4.4.5)$$

(1) 如果 $|\varphi\rangle_{\{j\}} = |\chi\rangle_{\{j\}} = 1$ , 则 $P_1 = \frac{1}{4}$ 。利用腔QED技术, 可以实现下面的变换,

$$|\varphi\rangle_{\{j\}} \longrightarrow |0\rangle_j |00 \cdots 0\rangle_{\{l \neq j\}}, \quad (4.4.6a)$$

$$|\chi\rangle_{\{j\}} \longrightarrow |1\rangle_j |00 \cdots 0\rangle_{\{l \neq j\}}. \quad (4.4.6b)$$

代入(4.4.5)式, 可得原子j的量子态为,

$$|\psi\rangle_j = (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_j. \quad (4.4.7)$$

再对粒子实施单粒子操作, 即可将未知的目标态制备在粒子j上, 成功概率为 $\frac{1}{4}$ 。这一过程总的成功概率为 $4 \times \frac{1}{4} = 1.0$ 。

(2) 如果 $|\varphi\rangle_{\{j\}} = a \neq 1, |\chi\rangle_{\{j\}} = b \neq 1$ , 这里 $a, b$ 均为实数。利用腔QED技术, 可以实现下面的变换,

$$|\varphi\rangle_{\{j\}} \longrightarrow a|0\rangle_j |00 \cdots 0\rangle_{\{l \neq j\}}, \quad (4.4.8a)$$

$$|\chi\rangle_{\{j\}} \longrightarrow b|1\rangle_j |00 \cdots 0\rangle_{\{l \neq j\}}. \quad (4.4.8b)$$

代入(4.3.96)式, 可得原子j的量子态为,

$$\frac{\alpha b |1\rangle_j + \beta a |0\rangle_j}{\sqrt{|\alpha|^2 |b|^2 + |\beta|^2 |a|^2}}. \quad (4.4.9)$$

据第4.3.5节的讨论, 这一过程只能是概率传态, 总的成功概率为 $\text{Min}(|a|^2, |b|^2)$ 。

#### 4.5 基于腔QED实现确定隐形传态纠缠态的纠缠度

对于两部构成的复合系统的一般纯态, 纠缠可以用这个态下约化密度算符的Von Neumann熵 (又称为部分熵) 度量。部分熵刻画两部分纯态系统相对最大纠缠程度 (以ebit为单位)。如果信息的发送者与她 (他) 的客户间共享(4.4.1)式所示纠缠态。粒子k属于发送者, 原子序列 $\{j = 1, \dots, n\}$ 中原子j 发送给第j个客户,  $|\varphi\rangle_{\{j\}}$ 和 $|\chi\rangle_{\{j\}}$ 是相互正交的。我们将纠缠态中粒子系统分为两个子系: 粒子k和其它粒子。则在纠缠态(4.4.1)下的约化密度矩阵是,

$$\rho = \text{tr}_{\{j\}} |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{\|\chi\rangle_{\{j\}}\|^2}{2} |0\rangle_k \langle 0| + \frac{\|\varphi\rangle_{\{j\}}\|^2}{2} |1\rangle_k \langle 1|. \quad (4.5.1)$$

Von Neumann熵 (部分熵) 是,

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho) = -\frac{\|\varphi\rangle_{\{j\}}\|^2}{2} \log \frac{\|\varphi\rangle_{\{j\}}\|^2}{2} - \frac{\|\chi\rangle_{\{j\}}\|^2}{2} \log \frac{\|\chi\rangle_{\{j\}}\|^2}{2}. \quad (4.5.2)$$

当 $\|\varphi\rangle_{\{j\}}\| = \|\chi\rangle_{\{j\}}\| = 1$ 时,  $S(\rho) = 1$ , 则粒了k与纠缠态中其它粒子处于最大纠缠态, 这样的量子通道能完成确定的隐形传态; 当 $\|\varphi\rangle_{\{j\}}\| \neq 1, \|\chi\rangle_{\{j\}}\| \neq 1$ 时,  $S(\rho) < 1$ , 则粒子k与纠缠态中其它粒子间处于非最大纠缠态, 这样的量子通道只能完成概率传态。

## 4.6 超算符方法处理确定量子隐形传态的理论方案

无论是纯态或混态, 任何量子态之间的任一映射总是一个相应的超算符 $\mathcal{S}$ 。按Kraus定理, 量子态的映射可以用超算映射方法的Kraus求和表示,

$$\rho'_A = \mathcal{S}[\rho_A] = \sum_{\mu} L_{\mu} \rho_A L_{\mu}^{\dagger}. \quad (4.6.1)$$

其中,  $\{L_{\mu}\}$ 是量子跃变算符序列。这一量子态变化的普遍描述, 也可用于隐形传态过程<sup>154</sup>。

### 4.6.1 单粒子隐形传态理论方案

假设Charlie在Alice处制备了一个量子态, 但Alice不知道这个量子态,

$$|\phi\rangle_C = \alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C. \quad (4.6.2)$$

Charlie让Alice将这一量子态发送给远处的Bob, Alice和Bob的两粒子A和B处在最大纠缠态上,

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}). \quad (4.6.3)$$

Alice将这一量子态发送给远处的Bob, 这一过程可以表示为密度矩阵映射过程, 即超算符作用的过程,

$$\mathcal{S}[|\psi\rangle_{AB}\langle\psi| \otimes |\phi\rangle_C\langle\phi|] = \sum_{\mu} L_{\mu} |\psi\rangle_{AB}\langle\psi| \otimes |\phi\rangle_C\langle\phi| L_{\mu}^{\dagger} = |\phi\rangle_B\langle\phi| \otimes I_{CA}. \quad (4.6.4)$$

关键是找到量子跃变算符 $L_{\mu}$ 。

将 $|\phi\rangle_C|\psi\rangle_{AB}$ 按照粒子C、A的Bell基 $|\phi^{\mu}\rangle_{CA}$ 展开有,

$$|\phi\rangle_C|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} |\phi^{\mu}\rangle_{CA} u_{\mu} |\phi\rangle_B. \quad (4.6.5)$$

其中,

$$\begin{cases} |\phi^0\rangle_{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{CA}, \\ |\phi^1\rangle_{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)_{CA}, \\ |\phi^2\rangle_{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)_{CA}, \\ |\phi^3\rangle_{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)_{CA}, \\ u_0 = 1, \quad u_1 = \sigma_z, \quad u_2 = \sigma_x, \quad u_3 = i\sigma_y. \end{cases} \quad (4.6.6)$$

则A、B、C粒子密度算符为

$$\rho_{tot} = |\psi\rangle_{AB}\langle\psi| \otimes |\phi\rangle_C\langle\phi| = \frac{1}{4} \sum_{\mu} \sum_{\lambda} |\phi^{\mu}\rangle_{CA}\langle\phi^{\lambda}| \otimes u_{\mu}|\phi\rangle_B\langle\phi|u_{\lambda}^{\dagger}. \quad (4.6.7)$$

定义 $L_{\mu} = u_{\mu}^{\dagger}|\phi^{\mu}\rangle$ , 即可得所要求的(4.6.4)式, 这里的 $u_{\mu}$ 是作用在B粒子上的。

#### 4.6.2 两体隐形传态理论方案

假设被传输的量子态为两个qubit的任意的态,

$$|\phi\rangle_{C_1C_2} = a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|10\rangle + a_3|11\rangle. \quad (4.6.8)$$

通讯双方共享两个EPR对,

$$|\psi\rangle_{A_kB_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{A_kB_k} \quad (k = 1, 2). \quad (4.6.9)$$

为简明起见, 记任意十进制数 $n = 2^{L-1}n_{L-1} + \dots + 2^1n_1 + 2^0n_0 \equiv (n_{L-1} \dots n_1n_0)$ , 则L位量子存储器的状态记为,

$$|n\rangle \equiv |n_{L-1} \dots n_1n_0\rangle. \quad (4.6.10)$$

利用新符号, 待传量子态及通讯双方共享的最子通道量子态分别为,

$$|\phi\rangle_C = \sum_{m=0}^3 a_m|m\rangle_C, \quad (4.6.11a)$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AB} &= |\psi\rangle_{A_1B_2} \otimes |\psi\rangle_{A_1B_2} \\ &= \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle)_{A_1A_1B_2B_2} \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{n=0}^3 |n\rangle_A |n\rangle_B. \end{aligned} \quad (4.6.11b)$$

$|\phi\rangle_C$ 相当于一个四能级粒子的任意态; 而 $|\psi\rangle_{AB}$ 与两个四能级粒子最大纠缠态的形式是一样的。两个四能级粒子的最大纠缠态 $\{|\phi^{\mu}\rangle (\mu = 0, 1, 2, \dots, 15)\}$ 构成一个16维Hilbert空间的基矢, 而且, 每一个基矢 $|\phi^{\mu}\rangle$ 可由 $u_{\mu}|\psi^{\mu}\rangle$ 的方法产生(见表4.5), 每一个 $u_{\mu}$ 是一个 $4 \times 4$ 矩阵,  $\{u_{\mu}\}$ 构成 $SU(4)$ 群。例如,

$$u_3 = \sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6.12)$$

将 $u_3$ 作用在 $|\psi\rangle_{AB}$ 的B粒子上, 可得对应的最大纠缠态 $|\phi^3\rangle$ , 即,

$$u_3|\psi\rangle_{AB} \longrightarrow |\phi^3\rangle_{AB} = \frac{1}{2}(|00\rangle - |11\rangle - |22\rangle + |33\rangle)_{AB}. \quad (4.6.13)$$

表 4.5 两个四能级粒子的最大纠缠态及对应的么正操作

Tab.4.5 The maximally entangled states of two 4-level particles and the corresponding unitary operations

么正操作 $u_\mu$	最大纠缠态 $ \phi^\mu\rangle$
$u_0 = I \otimes I$	$ \phi^0\rangle = \frac{1}{2}( 00\rangle +  11\rangle +  22\rangle +  33\rangle)$
$u_1 = \sigma_z \otimes I$	$ \phi^1\rangle = \frac{1}{2}( 00\rangle +  11\rangle -  22\rangle -  33\rangle)$
$u_2 = I \otimes \sigma_z$	$ \phi^2\rangle = \frac{1}{2}( 00\rangle -  11\rangle +  22\rangle -  33\rangle)$
$u_3 = \sigma_z \otimes \sigma_z$	$ \phi^3\rangle = \frac{1}{2}( 00\rangle -  11\rangle -  22\rangle +  33\rangle)$
$u_4 = I \otimes i\sigma_y$	$ \phi^4\rangle = \frac{1}{2}( 01\rangle +  10\rangle +  23\rangle +  32\rangle)$
$u_5 = \sigma_z \otimes i\sigma_y$	$ \phi^5\rangle = \frac{1}{2}( 01\rangle +  10\rangle -  23\rangle -  32\rangle)$
$u_6 = \sigma_x \otimes I$	$ \phi^6\rangle = \frac{1}{2}(- 01\rangle +  10\rangle -  23\rangle +  32\rangle)$
$u_7 = I \otimes i\sigma_y$	$ \phi^7\rangle = \frac{1}{2}(- 01\rangle +  10\rangle +  23\rangle -  32\rangle)$
$u_8 = \sigma_z \otimes I$	$ \phi^8\rangle = \frac{1}{2}( 02\rangle +  13\rangle +  20\rangle +  31\rangle)$
$u_9 = i\sigma_y \otimes I$	$ \phi^8\rangle = \frac{1}{2}(- 02\rangle -  13\rangle +  20\rangle +  31\rangle)$
$u_{10} = \sigma_x \otimes \sigma_z$	$ \phi^{10}\rangle = \frac{1}{2}( 02\rangle -  13\rangle +  20\rangle -  31\rangle)$
$u_{11} = i\sigma_y \otimes \sigma_z$	$ \phi^{11}\rangle = \frac{1}{2}(- 02\rangle +  13\rangle +  20\rangle -  31\rangle)$
$u_{12} = i\sigma_x \otimes \sigma_x$	$ \phi^{12}\rangle = \frac{1}{2}( 03\rangle +  12\rangle +  21\rangle +  30\rangle)$
$u_{13} = i\sigma_y \otimes \sigma_x$	$ \phi^{13}\rangle = \frac{1}{2}(- 03\rangle -  12\rangle +  21\rangle +  30\rangle)$
$u_{14} = \sigma_x \otimes i\sigma_y$	$ \phi^{14}\rangle = \frac{1}{2}(- 03\rangle +  12\rangle -  21\rangle +  30\rangle)$
$u_{15} = i\sigma_y \otimes i\sigma_y$	$ \phi^{15}\rangle = \frac{1}{2}( 03\rangle -  12\rangle -  21\rangle +  30\rangle)$

于是, 将ABC量子体系的总状态按照 $|\phi^\mu\rangle_{CA}$ 展开有,

$$|\phi\rangle_C \otimes |\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{15} |\phi^\mu\rangle_{CA} u_\mu |\phi\rangle_B. \quad (4.6.14)$$

如果取量子跃变算符 $L_\mu = u_\mu^\dagger \langle \phi^\mu |$ , 可得到(4.6.4)式, 即将量子隐形传态过程表示为超算符的作用过程。

同理, 如果要传送L个量子比特的任意态, 采用同样的方法, 也可将这一过程表示成为超算符的作用过程。



## 5 已知量子信息远程传输——远程态制备

远程态制备 (RSP) 是量子信息远程传输的另一种形式, 是一种利用纠缠和经典通讯传输量子态的简单方法。在远程态制备过程中, Alice 知道要发送的量子态, 可以利用 Alice 已掌握的信息, 通过适当幺正操作和选择合适的纠缠形式来减少量子通讯过程中经典信息的消耗, 比量子隐形传态消耗的资源更少。这一方面已有很多的理论方案<sup>[3,156-164]</sup>及实验探索<sup>[165-167]</sup>。本章首先介绍几种典型的 RSP 理论方案, 然后给出  $n$ -体 “equatorial” 态的远程态制备方案及利用腔 QED 理论实现单 qubit 任意态远程态制备方案。

### 5.1 几种典型的量子态远程态制备方案

#### 5.1.1 利用纠缠稀释与提纯实现远程态制备方案

假设 Alice 要帮助 Bob 制备  $N$  ( $N$  很大) 个单粒子量子态  $a|0\rangle + e^{i\theta_q}b|1\rangle$  ( $q = 1, 2, \dots, N$ ), 通讯双方事先知道  $a$ 、 $b$  值, 但只有 Alice 知道所有的  $\theta_q$ 。据前面的分析, 如果用隐形传态的方案来完成这一过程, 则需要  $2N$  cbits 的经典信息和  $N$  ebits 的纠缠。Lo<sup>[156]</sup> 提出, 利用数据压缩技术及对纠缠的操作, 只需  $NS$  ebits 和  $NS$  cbits, 既可以完成这一通讯过程, 这里,  $S = -|a|^2 \log_2 |a|^2 - |b|^2 \log_2 |b|^2$ , 基本过程如下:

(1) 假设 Alice 与 Bob 之间事先共享  $NS$  ebits 的纠缠, 即  $NS$  个 EPR 对, Alice 和 Bob 通过局域操作将  $NS$  个 EPR 对转换成  $N$  个纠缠态  $a|00\rangle_{A_q B_q} + b|11\rangle_{A_q B_q}$ , 这是一个纠缠稀释过程<sup>[12,14,168]</sup>, 当  $N$  很大时, 纠缠稀释过程所消耗的经典信息趋于零<sup>[168]</sup>。Alice 对粒子  $A_q$  实施  $|1\rangle_{A_q} \rightarrow e^{i\theta_q}|1\rangle_{A_q}$  变换, 这样, 便完成量子隐形传态的第一步, 即  $a|00\rangle_{A_q B_q} + e^{i\theta_q}b|11\rangle_{A_q B_q}$ 。

(2) 通讯双方再将各自的粒子系统压缩成  $NS$  个量子比特<sup>[169,170]</sup>。然后, 按照隐形传态的第二步进行操作, 则可将  $NS$  个量子态制备在 Bob 的粒子系统上, Bob 再对其粒子系统实施粒子数据解压, 便得到了  $N$  个量子态  $a|0\rangle_{B_q} + e^{i\theta_q}b|1\rangle_{B_q}$ , 完成了整个通讯过程, 共消耗  $NS$  ebits 和  $NS$  cbits。在这一方案中, 只有当  $N$  很大时, 才能使输出信息的保真度接近于 1。

#### 5.1.2 消耗最少经典信息的单粒子态远程态制备方案

2001 年, Pati 提出单粒子态远程态制备方案<sup>[3]</sup>, 这种量子信息传递过程需消耗 1 ebit 的纠缠, 需要传输 1 cbit 的经典信息。

Alice 要在Bob处制备一个两态系统的任意量子态,

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle. \quad (5.1.1)$$

两个实参数  $0 \leq \theta \leq \pi$  和  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  对 Alice 是已知, 对 Bob 来说是未知的。一组  $(\theta, \varphi)$  值确定了 Bloch 球上的一个点, 对应于 2-维 Hilbert 空间上的一个矢量,  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  是这个空间的一组基矢, 定义另一组基矢为  $\{|\psi\rangle, |\bar{\psi}\rangle\}$ ,  $|\bar{\psi}\rangle$  与  $|\psi\rangle$  正交,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle, \\ |\bar{\psi}\rangle &= -\sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

这两组基矢的对应关系为,

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \cos(\theta/2)|\psi\rangle - \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|\bar{\psi}\rangle, \\ |1\rangle &= \sin(\theta/2)e^{-i\varphi}|\psi\rangle - \cos(\theta/2)|\bar{\psi}\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Alice 与 Bob 间的量子通道是一个 EPR 对,

$$|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}) \quad (5.1.4)$$

他们分别拥有粒子 A 和粒子 B。用基  $\{|\psi\rangle, |\bar{\psi}\rangle\}$  可将 EPR 对改写为,

$$|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle_A |\bar{\psi}\rangle_B - |\bar{\psi}\rangle_A |\psi\rangle_B) \quad (5.1.5)$$

因为 Alice 知道要制备的量子态, 所以, 她可以对其拥有的粒子 A 在  $\{|\psi\rangle, |\bar{\psi}\rangle\}$  基矢下进行测量。Alice 将测量结果告诉 Bob, 这需要传递 1cbit 的经典信息。如果 Alice 的测量结果是  $|\bar{\psi}\rangle_A$ , 则 Bob 的粒子 B 被制备在目标态  $|\psi\rangle_B$  上; 但如果 Alice 的测量结果为  $|\psi\rangle_A$ , 则 Bob 需要实施一个操作, 使  $|\bar{\psi}\rangle_B \rightarrow |\psi\rangle_B$ , 这个操作具体形式与被制备的量子态及量子通道的纠缠形式均有关系 (量子通道也可以是其它三种 Bell 态  $|\phi^\pm\rangle, |\psi^-\rangle$ )。

下面介绍一下, 假设量子通道是 (5.1.4) 式, 对于不同的目标态, Bob 要实施怎样的么正操作才能实现  $|\bar{\psi}\rangle_B \rightarrow |\psi\rangle_B$  变换。

(1) 如果取  $\varphi = 0$ , 则被制备的量子态的系数为实数, 于是,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle, \\ |\bar{\psi}\rangle &= -\sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)|1\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

知道Alice的测量结果后, Bob需要做 $i\sigma_y$ 操作, 才能将粒子B制备在目标态 $|\psi\rangle_B$ 上。

(2) 如果 $\theta = \pi/2$ 时,  $|\psi\rangle$ 被称为“equatorial”态, 则

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle), \\ |\bar{\psi}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle). \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

则Bob需要对 $|\bar{\psi}\rangle_B$ 实施 $\sigma_z$ 操作, 才能获目标态 $|\psi\rangle_B$ 。

(3) 如果 $\varphi = \pi/2$ , 则

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + i\sin(\theta/2)|1\rangle, \\ |\bar{\psi}\rangle &= -\sin(\theta/2)|0\rangle + i\cos(\theta/2)|1\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

则Bob需要对 $|\bar{\psi}\rangle_B$ 实施 $\sigma_x$ 操作, 才能获目标态 $|\psi\rangle_B$ 。

(4) 如果 $\varphi = \varphi_0$ , 则

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi_0}|1\rangle, \\ |\bar{\psi}\rangle &= -\sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)e^{i\varphi_0}|1\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

则Bob需要对 $|\bar{\psi}\rangle_B$ 实施下面的幺正操作, 才能实现 $|\bar{\psi}\rangle_B \rightarrow |\psi\rangle_B$ 变换。

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi_0} \\ -e^{i\varphi_0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.10)$$

(5) 如果让参数 $\theta = \theta_0$ 确定,  $\varphi$ 是任意值, 则Bob需要对粒子B实施的操作是一个厄密但非幺正变换,

$$\begin{pmatrix} -\cot(\theta/2) & 0 \\ 0 & \tan(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (5.1.11)$$

(6) 如果 $\theta$ 和 $\varphi$ 是任意值, 即被制备量子态对Bob来说是一个完全未知的量子态, 则Bob无法实现 $|\bar{\psi}\rangle_B \rightarrow |\psi\rangle_B$ 变换。尽管我们可以设计一个非门(Not门)以实现经典信息的逻辑非操作, 即 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ 和 $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ , 但却无法实现普适非门( $U-Not$ )来实现 $|\psi\rangle \rightarrow |\bar{\psi}\rangle$ 和 $|\bar{\psi}\rangle \rightarrow |\psi\rangle$ 。原因是, 这样的 $U-Not$ 操作是一个反幺正操作, 而反幺正操作是不可能精确实现的<sup>165,166</sup>。

所以, 如果Bob知道被传递量子态中的一个参数, 只消耗1cbit和1ebit就可成功实现远程态制备。但如果只传输1cbit的经典信息, 任意单粒子态的远程态制备成功概率仅

为0.5。Lo<sup>[156]</sup>已证明,如果Alice在Bob处制备任意一个已知的单粒子态(但对Bob是未知的),她仍需传输2cbits的经典信息和1ebit的纠缠,所消耗的资源与以隐形传态方式传输一个量子比特所消耗的资源是一样的。

### 5.1.3 多体dark量子态的特性

量子计算和量子通讯依赖于可控制的量子态的演化<sup>[171]</sup>,任何不可控制的态的演化都可能导致错误的量子计算,这种效应叫退相干。规避退相干主要有两种方法:一是在量子计算过程中对误码求迹,这种方法叫做量子纠错;二是承载信息的量子态对环境影响不敏感,这样的量子态叫做dark态<sup>[173-175]</sup>。dark态一般是具有某种对称性的两体或多体纠缠态,是相互作用Hamilton量本征值为零的本征态,这种量子态不随时间演化。

如果一个N-体量子系统的N个全同粒子处在同一个环境中,即每一个粒子经历相同的任意么正变换U,则N-体dark态 $|\psi\rangle_N$ 定义为

$$U^{\otimes N}|\psi\rangle_N = U \otimes U \otimes \cdots \otimes U|\psi\rangle_N = |\psi\rangle_N. \quad (5.1.12)$$

例如,两个二态系统的dark态是反对称Bell态 $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ ,在任意么正变换下 $U \otimes U|\psi^-\rangle = |\psi^-\rangle$

Kok<sup>172</sup>证明dark态具有如下特性:

(1) 一个d-维N粒子系统的量子态 $|\psi\rangle_N$ 是dark态,当且仅当

$$S_{\pm(h,j)}|\psi\rangle_N = 0. \quad (5.1.13)$$

这里,

$$S_{\pm(h,j)} = S_{\pm(h,j)}^1 + S_{\pm(h,j)}^2 + \cdots + S_{\pm(h,j)}^d. \quad (5.1.14)$$

$S_{\pm(h,j)}^k$ 是第k个粒子|h)和|j)间上升、下降算符,  $h \neq j, 1 \leq h, j \leq d$ 。

(2) 对一个d-维N-体量子系统,当 $N < d$ 时,不存在dark态。

(3) 处于dark态的量子系统粒子数需满足 $N = m d$ , m是正整数, d是指每一个粒子Hilbert空间的维数。所以, d-维多体量子系统处于dark态时,这个量子系统至少应包含d个d-维粒子,对应的dark态为:

$$|\psi\rangle_d = \frac{1}{\sqrt{d!}} \sum_{x < y = 1}^d (|j_x k_y\rangle - |j_y k_x\rangle) \otimes \sum_{P_{all}} (-1)^t P_{all} [|\cdots h_z \cdots\rangle_{h \neq j, k; z \neq x, y}] \quad (5.1.15)$$

式中的 $x, y$ 表示粒子编号,且 $1 \leq x < y \leq d$ ,  $P_{all}$ 表示对粒子编号的排列。 $t$ 表示某一个排列的逆序数。

(4) 两个dark态的线性叠加态仍是dark态。

(5) 如果量子系统是由 $N = md$ 个 $d$ -维粒子组成,则可构建 $m$ 个正交的dark态。

#### 5.1.4 利用dark态实现多目标远程态制备方案

根据多体dark态特点,若 $|\psi\rangle$ 是 $N$ -体dark态,则(5.1.12)式可以进一步改写为:

$$U^\dagger \otimes I \otimes \cdots \otimes I |\psi\rangle_N = I \otimes U \otimes \cdots \otimes U |\psi\rangle_N. \quad (5.1.16)$$

根据这一特性,可用dark态作为量子通道,实现远程态制备<sup>157</sup>,如选适当的dark态,则可将量子态同时制备在不同的目的地,而且,所消耗的经典信息少于相应量子隐形传态过程。

##### (1) 单目标单个qubit量子态远程态制备

任意一个两态系统的量子态可以表示为(5.1.1)式,相应的正交态为(5.1.2)式中 $|\bar{\psi}\rangle$ 。这个量子态对Alice是已知的,对Bob是未知的,Alice想要使这个量子态在Bob处再现。他们之间共享一个反对称的Bell态 $|\psi^-\rangle_{AB}$ 。由于Alice知道这个量子态,她可以对其手中粒子A实施与被传输量子态相关的幺正操作 $U^\dagger$ ,

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi} & \cos(\theta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5.1.17)$$

这是一个幺正 $U^\dagger U = 1$ 、幺模 $|U| = 1$ 操作,是 $SU(2)$ 群中的元素,它能实现下面的变换:

$$\begin{aligned} U|0\rangle &\longrightarrow |\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle, \\ U|1\rangle &\longrightarrow |\bar{\psi}\rangle = -\sin(\theta/2)|0\rangle + \cos(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

所以,有

$$U^\dagger \otimes I |\psi^-\rangle_{AB} = I \otimes U |\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |\bar{\psi}\rangle_B + |1\rangle_A |\psi\rangle_B). \quad (5.1.19)$$

然后,Alice对粒子A实施投影测量,并发送1 cbit的经典信息告诉Bob她的测量结果。如果结果为 $|1\rangle_A$ ,则Bob手中粒子B被成功地制备在目标态 $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle$ 上;如果测量结果为 $|0\rangle_A$ ,则Bob需完成一个变换操作 $V$ ,使 $|\bar{\psi}\rangle_B \rightarrow |\psi\rangle_B$ 。 $V$ 变换与被制备的量子态有关,他们之间对应关系与第5.1.2节的讨论相同,这里不再赘述。与Pati<sup>[3]</sup>的远程态制备方案不同点是,当以dark态做为量子通道时,Alice实

施投影测量基矢是 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , 而不是 $\{|\psi\rangle, |\bar{\psi}\rangle\}$ ; 但与Pati方案的结论是一致的, 即当Bob知道未知量子态中的一个参数时, 只需传递1cbit的经典信息和消耗1ebit的纠缠即可完成单粒子态的远程态制备, 对任意粒子态的远程态制备仍需消耗2cbit经典信息和消耗1cbit的纠缠。

### (2) 多目标单个qubit量子态远程态制备

Alice想要把一个两态系统的量子态同时发送给她的 $n$ 个客户 $Bob_1, Bob_2, \dots, Bob_n$ , 那么, 如果她与客户间的量子通道是 $N$ -体dark态, 则 $N = 2n^{[172]}$ 。首先以Alice有两个客户Bob和Charlie为例, 做为量子通道的dark态 $|\psi\rangle_{A_1 A_2 BC}$ 应是4粒子的纠缠态,

$$|\psi\rangle_{A_1 A_2 BC} = \frac{1}{2} [ |0011\rangle + |1100\rangle - |0110\rangle - |1001\rangle ]. \quad (5.1.20)$$

Alice拥有粒子 $(A_1, A_2)$ , 粒子B、C分别分发给Bob和Charlie。Alice对粒子 $(A_1, A_2)$ 实施 $U^\dagger \otimes U^\dagger$ 变换, 据dark态的特性, 则有

$$\begin{aligned} U^\dagger \otimes U^\dagger \otimes I \otimes I |\psi\rangle_{A_1 A_2 BC} &= I \otimes I \otimes U \otimes U |\psi\rangle_{A_1 A_2 BC} \\ &= \frac{1}{2} [ |00\rangle_{A_1 A_2} |\bar{\psi}\rangle_B |\bar{\psi}\rangle_C + |11\rangle_{A_1 A_2} |\psi\rangle_B |\psi\rangle_C \\ &\quad - |01\rangle_{A_1 A_2} |\bar{\psi}\rangle_B |\psi\rangle_C - |10\rangle_{A_1 A_2} |\psi\rangle_B |\bar{\psi}\rangle_C ]. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Alice对粒子 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}_{A_1 A_2}$ , 如果测量结果为 $|01\rangle_{A_1 A_2}$ , 测量后粒子B、C的量子态为 $|\bar{\psi}\rangle_B$ 和 $|\psi\rangle_C$ 。然后, Alice发送1cbit经典信息分别给Bob和Charlie, 告诉他们她的测量结果。最后, Bob和Charlie需要实施么正操 $V$ 及恒等操作以得到目标态 $|\psi\rangle$ 。 $V$ 的具体形与被传送的量子有关(第5.1.2节的讨论)。

如果Alice想要把已知两态系统量子态 $|\psi\rangle$ 同时传给 $Bob_1, Bob_2, \dots, Bob_n$ , 做为量子通道的dark态应该是由 $N = 2n$ 个粒子构成的特殊的纠缠态, 这样的纠缠态有很多, 其中的一个可以写成,

$$|\psi\rangle_{A_{\{j\}} B_{\{j\}}} = |\psi^-\rangle_{A_1 B_1} \otimes |\psi^-\rangle_{A_2 B_2} \otimes \dots \otimes |\psi^-\rangle_{A_n B_n}. \quad (5.1.22)$$

式中,  $|\psi^-\rangle_{A_k B_k} = (|01\rangle_{A_k B_k} - |10\rangle_{A_k B_k}) / \sqrt{2}$ 。Alice拥有原子序列 $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , 粒子 $k$ 属于 $Bob_k$ 。Alice对她的每一个粒子实施 $U^\dagger$ 后, 在基矢 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 下对每一个粒子进行投影测量, 将测量结果利用1cbit的经典信息发送给每一个客户,  $Bob_k$ 再据Alice的经典信息, 做其手中粒子实施适当的么正操, 最后将粒子 $B_k$ 制备在目标态 $|\psi\rangle$ 上。

在这一信息传输过程中, Alice同时将一个已知单粒子态发送给 $n$ 个客户, 相当于发送 $n$  qubits量子信息, 需要传输 $n$  cbits经典信息及 $n$  ebits纠缠。但如果要制备任意两态系统量子态则需要 $2n$  cbits和 $n$  ebits。

### (3) 单个qutrit量子态的远程态制备

下面介绍利用dark态做量子通道实现一个qutrit态的远程态制备方案。一个qutrit就是一个三态系统，描述一个qutrit的量子态 $|\psi\rangle \in H^3$ 需要四个参数 $\gamma_1, \gamma_2$ 和 $\delta_1, \delta_2$ ,  $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq \pi$ ,  $0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 2\pi$ 。如果3-维Hilbert空间的基矢为 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ , 则一个qutrit的任意量子态可以表示为,

$$|\psi_0\rangle = \cos(\gamma_1/2)|0\rangle + \sin(\gamma_1/2)\cos(\gamma_2/2)|e^{i\delta_1}|1\rangle + \sin(\gamma_1/2)\sin(\gamma_2/2)|e^{i\delta_2}|2\rangle. \quad (5.1.23)$$

3-维Hilbert空间包含(5.1.23)式的基矢记为 $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ , 可以由 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ 经幺正变换 $U$ 得到, 即

$$\begin{aligned} U(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2)|0\rangle &= |\psi_0\rangle = \cos(\gamma_1/2)|0\rangle + \sin(\gamma_1/2)\cos(\gamma_2/2)|e^{i\delta_1}|1\rangle \\ &\quad + \sin(\gamma_1/2)\sin(\gamma_2/2)|e^{i\delta_2}|2\rangle, \\ U(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2)|1\rangle &= |\psi_1\rangle = \sin(\gamma_1/2)|0\rangle - \cos(\gamma_1/2)\cos(\gamma_2/2)|e^{i\delta_1}|1\rangle \\ &\quad - \cos(\gamma_1/2)\sin(\gamma_2/2)|e^{i\delta_2}|2\rangle, \\ U(\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2)|2\rangle &= |\psi_2\rangle = \sin(\gamma_2/2)|e^{i\delta_1}|1\rangle - \cos(\gamma_2/2)|e^{i\delta_2}|2\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

$|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 是相互正交的。3-维 $N$ -体dark态中,  $N$ 的最小值应是 $N = 3$ , 当粒子数 $N$ 等于每一个粒子Hilbert空间维数 $d$  (这里 $d = 3$ )时,  $N$ -体Dark态与 $N$ -体反对称态是一致的, 所以, 用基矢 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ 表示的3-维3-体dark态可以写成下面的形式,

$$|\psi\rangle_{A_1 A_2 B} = \frac{1}{\sqrt{6}} (|012\rangle + |120\rangle + |201\rangle - |021\rangle - |102\rangle - |210\rangle) \quad (5.1.25)$$

粒子 $(A_1, A_2)$ 和粒子 $B$  分别分发给Alice 和Bob, (5.1.25)式所表示的纠缠态中, 粒子 $(A_1, A_2)$ 与粒子 $B$ 之间的纠缠度 (即Von-Neumann 熵) 为 $\log_2 3$ 。

由于(5.1.25)式是dark态, 在幺正变换 $U \otimes U \otimes U$ 下应保持不变。所以, 当Alice对量子通道中粒子 $((A_1, A_2))$ 实施 $U^\dagger \otimes U^\dagger$ 操作时, 应有如下的变换

$$\begin{aligned} U^\dagger \otimes U^\dagger \otimes I |\psi\rangle_{A_1 A_2 B} &= I \otimes I \otimes U |\psi\rangle_{A_1 A_2 B} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|01\rangle|\psi\rangle_2 + |12\rangle|\psi\rangle_0 + |20\rangle|\psi\rangle_1 \\ &\quad - |02\rangle|\psi\rangle_1 - |10\rangle|\psi\rangle_2 - |21\rangle|\psi\rangle_0) \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

与前面的讨论一样, 在量子态远程制备过程中, 如果要传输最少经典信息, 只有对某些特定的qutrit量子态, 才能利用dark态实现远程态制备。

假设Alice要发送的是一个“equatorial” qutrit量子态:  $\gamma_2 = \pi/2$ ,  $\cos(\gamma_1/2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 由(5.1.23)式, 有

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + |e^{i\delta_1}1\rangle + |e^{i\delta_2}2\rangle) \quad (5.1.27)$$

则对应的基矢 $\{|\psi\rangle_0, |\psi\rangle_1, |\psi\rangle_2\}$ 可由U变换获得,

$$\begin{aligned} U|0\rangle = |\psi\rangle_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + |e^{i\delta_1}1\rangle + |e^{i\delta_2}2\rangle), \\ U|1\rangle = |\psi\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + \Gamma|e^{i\delta_1}1\rangle + \Gamma^2|e^{i\delta_2}2\rangle), \\ U|2\rangle = |\psi\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|0\rangle + \Gamma^2|e^{i\delta_1}1\rangle + \Gamma|e^{i\delta_2}2\rangle), \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

其中 $\Gamma = e^{i2\pi/3}$ 。Alice实施 $U^\dagger \otimes U^\dagger$ 操作后, 将量子通道演变为(5.1.26)式的形式。

接下来, 在 $\{|00\rangle, |01\rangle, |02\rangle, |10\rangle, |11\rangle, |12\rangle, |20\rangle, |21\rangle, |22\rangle\}_{A_1 A_2}$ 基矢下实施两粒测量, 则Bob的粒子B的量子态塌缩为 $|\psi\rangle_0$ , 或 $|\psi\rangle_1$ , 或 $|\psi\rangle_2$ 。Alice通过经典信道告诉Bob对粒子B实施 $V_0$ 或 $V_1$ 或 $V_2$ 操作以获得目标态 $|\psi\rangle_0$ , 这三种操作分别可以实现下面的变换,

$$V_0|\psi\rangle_0 \longrightarrow |\psi\rangle_0, \quad V_1|\psi\rangle_1 \longrightarrow |\psi\rangle_0, \quad V_2|\psi\rangle_2 \longrightarrow |\psi\rangle_0. \quad (5.1.29)$$

这里,  $V_0 = I$ ,  $V_1 = \text{diag}(1, \Gamma^2, \Gamma)$ ,  $V_2 = \text{diag}(1, \Gamma, \Gamma^2)$ , 也可以取 $V_1 = \text{diag}(1, \Gamma^-, \Gamma^{-2})$ ,  $V_2 = \text{diag}(1, \Gamma^{-2}, \Gamma^-)$

在这一过程中, 成功地完成了单目标一个qutrit量子态的远程态制备。

Alice也可以将这一已知的、特殊的qutrit量子态同时发送给她的n个客户, 需消耗 $n \log_2 3 \text{ cbits}$ 和 $n \log_2 3 \text{ ebits}$ 。

#### (4) 单个qudit量子态的远程态制备

一个d-维的量子系统被称为一个qudit, 一个任意qudit量子态可以 $2(d-1)$ 个实参数来表示,

$$|\psi_0\rangle = \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j |j\rangle. \quad (5.1.30)$$

这理,

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= \cos\gamma_1, \\
 \beta_1 &= e^{i\delta_1} \cos\gamma_2 \sin\gamma_1, \\
 \beta_2 &= e^{i\delta_2} \cos\gamma_3 \sin\gamma_2 \sin\gamma_1, \\
 &\dots\dots \\
 \beta_{d-2} &= e^{i\delta_{d-2}} \cos\gamma_{d-1} \sin\gamma_{d-2} \sin\gamma_{d-3} \dots \sin\gamma_1, \\
 \beta_{d-1} &= e^{i\delta_{d-1}} \sin\gamma_{d-1} \sin\gamma_{d-2} \sin\gamma_{d-3} \dots \sin\gamma_1,
 \end{aligned}
 \tag{5.1.31}$$

其中  $0 \leq \gamma_1, \dots, \gamma_{d-1} \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \delta_1, \dots, \delta_{d-1} \leq 2\pi$ ,  $\{|j\rangle = |0\rangle, |1\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$  是  $d$ -维 Hilbert 空间的一组基矢。

Alice 要将一个已知的 qudit 量子态发送给 Bob (Bob 不知道关于这个量子态的任何信息), 仍用 dark 态做为量子通道, 据上面的讨论, 这个量子通道中至少要包含  $N = d$  个  $d$ -维粒子, 这个 dark 态可以表示为下面的形式:

$$|\psi\rangle_{\{N\}} = \frac{1}{\sqrt{d!}} \sum (-1)^t P_{all} (|\pi_0\rangle |\pi_1\rangle \dots |\pi_{d-1}\rangle).
 \tag{5.1.32}$$

$\sum$  表示对  $0, 1, \dots, d-1$  共  $d$  个数的所有排列取和,  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{d-1}$  表示这  $d$  个数的一个排列, 这样的排列共有  $d!$  项,  $t$  表示某个排列  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{d-1}$  的逆序数,  $\{N\}$  表示粒子序列  $N = A_1, A_2, \dots, A_{d-1}, B$ 。Alice 拥有前  $d-1$  个粒子, 粒子  $B$  属于 Bob。粒子  $B$  与其它粒子间的纠缠度为  $\log_2 d$ 。

下面介绍 “equatorial” qudit 量子态的远程态制备。一个 “equatorial” qudit 态可以表示为:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{i\delta_j} |j\rangle.
 \tag{5.1.33}$$

式中的  $\delta_0 = 0$ 。

仍以  $d$ -维  $N$ -体 dark 态根据要发送量子态的信息, 选择一个能实现下面变换的么正操作  $U$ ,

$$U|k\rangle = |\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \Gamma^{jk} e^{i\delta_j} |j\rangle.
 \tag{5.1.34}$$

$\Gamma = e^{i2\pi/d}$ ,  $\{|\psi_k\rangle, k = 0, 1, \dots, d-1\}$  是  $d$ -维 Hilbert 空间另一组正交完备基矢。

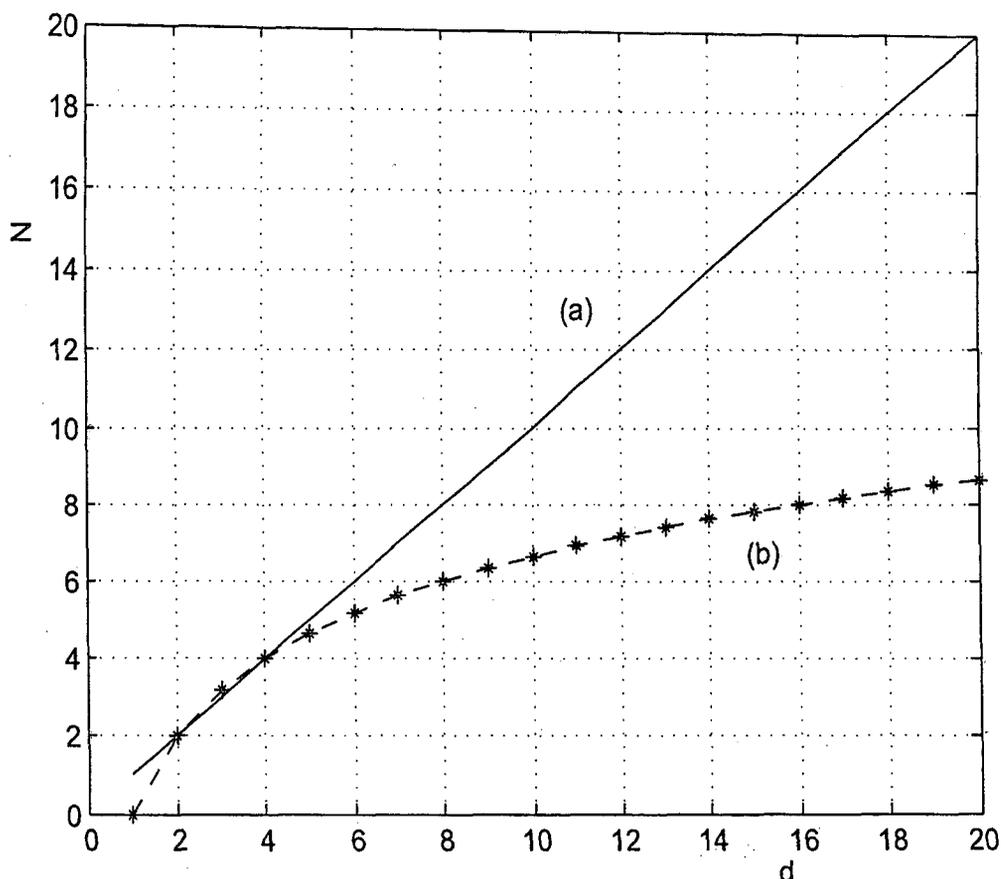


图 5.1 两种量子通道中的粒子数。(a)表示dark态中的粒子数；(b)表示EPR对中的粒子数。

Fig. 5.1 The number of particles in two kinds of quantum channels . (a)Denotes the number of particles in a dark state; (b) Denotes the number of particles in EPR pairs.

然后，Alice对她的每一个粒子实施 $U^\dagger$ 操作，再对她所有的 $d - 1$ 个粒量子实施测量，则粒子B的量子态一定是 $\{|\psi_k\rangle, k = 0, 1, \dots, d - 1\}$ 中的一个。Alice通过经典信道通知Bob实施哪一个么正操作 $V_k (k = 0, 1, \dots, d - 1)$ ，以实现 $|\psi_k\rangle \rightarrow |\psi_0\rangle$ 的变换，其中

$$V_k = \sum_{j=0}^{d-1} \Gamma^{-jk} |j\rangle\langle j|. \quad (5.1.35)$$

$$V_k |\psi_k\rangle = |\psi_0\rangle. \quad (5.1.36)$$

在这一过程中，传输了 $\log_2 d$  qubits 的量子信息，共消耗了 $\log_2 d$  cbits 的经典信息和 $\log_2 d$  ebits 的纠缠资源。同理，如果Alice的 $n$ 个客户同时得到这个qudit量子态，则需消耗 $n \log_2 d$  cbits 的经典信息和 $n \log_2 d$  ebits 的纠缠。

### 5.1.5 小结

一个 $d$ -维系统的任意量子态可由 $2(d-1)$ 个实参数来表示, 通过以上所讨论的RSP方案, 我们可以得出以下结论:

(1) 如果信息的接收方知道这其中的 $d-1$ 参数, 则在远程态制备过程中, 需要传输 $\log_2 d$  cbits的经典信息; 但如果这 $2(d-1)$ 个参数对接收方来说是未知的, 则需要消耗 $2\log_2 d$  cbits的经典信息。但这两种情况所需的量子资源(纠缠)是一样的。

(2) 在量子态远程态制备过程中, 不需要Bell基测量。

(3) 用dark态做为量子通道, 优点是dark态具有抗退相干性, 能提高量子信息传输的保真度。一个 $d$ -维 $N$ -体dark态,  $N$ 的最小值是 $d$ , 也就是说用一个dark态传送一个 $d$ -维量子系统, 在量子通道中至少有 $N=d$ 个粒子(qudits), 这样的dark态的纠缠与 $N=\log_2 d$ 个EPR对的纠缠是等价的, 所以, 如果改用EPR对做为量子通道, 则需要 $N=2\log_2 d$ 个粒子(qubits)。由图5.1可以看到, 当 $d=2$ 或 $4$ 时, dark态分别相当于一个或两个EPR对, 但当 $d>4$ 时, 与一个dark态等价的EPR对中包含的粒子数比dark态中的粒子数少得多, 所以, 对高维量子系统的量子态远程态制备, 用EPR对做为量子通道更能节省资源。

下面我们用EPR对做为量子通道, 提出高维( $d>4$ )“equatorial”量子态的RSP方案, 并用进一步推广至受控RSP方案; 并给出两态系统任意量子态的RSP方案, 在该方案中, 利用了腔QED技术, 仅消耗1cbits的经典信息。

## 5.2 消耗最少经典信息n-qubit “equatorial”态RSP方案

本节利用EPR对和GHZ态做为量子通道, 实现n-qubit “equatorial”态远程态制备, 在通讯过程中, 与Pati方案一样, 只需传递最少的经典信息, 并进一步给出受控RSP方案, 最后, 阐述了消耗最少经典信息的单qubit “equatorial”态RSP方案。

### 5.2.1 单qubit “equatorial”态RSP方案

一个两态系统的任意态表示为,

$$|\phi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|1\rangle. \quad (5.2.1)$$

$\theta$  和  $\varphi$  是实参数,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . 如果  $\theta = \pi/2$ , 对应的量子态为一个qubit的“equatorial”态,

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle), \quad (5.2.2)$$

与 $|\phi_0\rangle$ 正交的一个量子态可以表示为:

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - e^{i\varphi}|1\rangle). \quad (5.2.3)$$

假设Alice知道 $|\phi_0\rangle$ 的全部信息, 而 $|\phi_0\rangle$ 对Bob来说是未知的, Alice希望这一量子态传给Bob, 他们之间事先共享一个EPR对,

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (5.2.4)$$

Alice和Bob分别拥有A,B 粒子。由于Alice知道这个被发送的量子态, 所以, 她可以对粒子A实施任何一种与 $|\phi_0\rangle$ 有关的么正操作 $U$ ,

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\varphi} \\ 1 & -e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (5.2.5)$$

$U$ 操作后, (5.2.4)式变为:

$$U|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|\phi_0\rangle_B + |1\rangle_A|\phi_1\rangle_B), \quad (5.2.6)$$

然后, Alice 对粒子A实施一个Von Neumann 投影测量并发送1 cbit 给Bob告诉他测量结果。对应于测量结果 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ , 粒子B的坍缩态为 $|\phi_0\rangle_B$ 或 $|\phi_1\rangle_B$ 。根据Alice 的测量结果, Bob 只要对粒子B实施恒等操作 $I$ 或 $\sigma_z$ , 便完成了量子态远程态制备过程。

这一RSP过程所消耗资源及所传递的量子信息可以用下面的公式表示,

$$1 \text{ cbit} + 1 \text{ ebit} \longrightarrow 1 \text{ qubit} \quad (5.2.7)$$

### 5.2.2 2-qubit “equatorial” 态RSP方案

下面介绍如何远程制备2-qubit “equatorial” 态。2-qubit “equatorial” 态为,

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + e^{i\varphi_1}|01\rangle + e^{i\varphi_2}|10\rangle + e^{i\varphi_3}|11\rangle). \quad (5.2.8)$$

假设Alice与Bob 量子通道为两个EPR对,

$$|\phi^+\rangle_{A_1B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (5.2.9a)$$

$$|\phi^+\rangle_{A_2B_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (5.2.9b)$$

$(A_1, A_2)$ 和 $(B_1, B_2)$  分别分发给Alice与Bob, 则量子通道中全部粒子构成的量子体系的量子态为,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\phi^+\rangle_{A_1 B_1} \otimes |\phi^+\rangle_{A_2 B_2} \\ &= \frac{1}{2}(|0000\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle + |1111\rangle)_{A_1 A_2 B_1 B_2}. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Alice对她的两个粒子 $(A_1, A_2)$ 实施下面的U操作:

$$\begin{aligned} U|00\rangle &= |\phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle), \\ U|01\rangle &= |\phi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{i\varphi_1}(|00\rangle + \Gamma|01\rangle + \Gamma^2|10\rangle + \Gamma^3|11\rangle), \\ U|10\rangle &= |\phi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{i\varphi_2}(|00\rangle + \Gamma^2|01\rangle + \Gamma^4|10\rangle + \Gamma^6|11\rangle), \\ U|11\rangle &= |\phi\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{i\varphi_3}(|00\rangle + \Gamma^3|01\rangle + \Gamma^6|10\rangle + \Gamma^9|11\rangle), \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

这里,  $\Gamma = e^{i\pi/2}$ . U操作后, (5.2.10)式变为,

$$U|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle_{A_1 A_2} |\phi_0\rangle_{B_1 B_2} + |01\rangle_{A_1 A_2} |\phi_1\rangle_{B_1 B_2} + |10\rangle_{A_1 A_2} |\phi_2\rangle_{B_1 B_2} + |11\rangle_{A_1 A_2} |\phi_3\rangle_{B_1 B_2}), \quad (5.2.12)$$

其中,

$$|\phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + \Gamma^k e^{i\varphi_1}|01\rangle + \Gamma^{2k} e^{i\varphi_2}|10\rangle + \Gamma^{3k} e^{i\varphi_3}|11\rangle), (k = 0, 1, 2, 3). \quad (5.2.13)$$

$\{|\phi_k\rangle, k = 0, 1, 2, 3\}$ 是4-维Hilbert空间的另一组正交归一化的基矢。二进制表示的基矢 $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ 可用十进制表示为 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ , 则(5.2.12)式可改写为:

$$U|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle_{A_1 A_2} |\phi_0\rangle_{B_1 B_2} + |1\rangle_{A_1 A_2} |\phi_1\rangle_{B_1 B_2} + |2\rangle_{A_1 A_2} |\phi_2\rangle_{B_1 B_2} + |3\rangle_{A_1 A_2} |\phi_3\rangle_{B_1 B_2}). \quad (5.2.14)$$

Alice对粒子 $(A_1, A_2)$ 实施投影测量, 如果测量结果为 $|k\rangle_{A_1 A_2}$ , Alice 可以发送2 *cbits*的经典信息让Bob知道他的两个qubits量子态已坍缩到 $|\phi_k\rangle$ 上.

Bob 可以对他的量子系统实施下面的么正操作, 就可以将目标态 $|\phi_0\rangle$ 制备在粒子 $(B_1, B_2)$ 上,

$$V_k = \text{diag} (1, \Gamma^{-k}, \Gamma^{-2k}, \Gamma^{-3k}) \quad (5.2.15)$$

$V_k$ 可以实现下面的量子态变换:

$$V_k|\phi_k\rangle \rightarrow |\phi_0\rangle \quad (5.2.16)$$

这一RSP过程所消耗资源及所传递的量子信息可以表示为,

$$2 \text{ cbits} + 2 \text{ ebits} \longrightarrow 2 \text{ qubits} \quad (5.2.17)$$

### 5.2.3 n-qubit “equatorial” 态RSP方案

现在,我们考虑如何完成n-qubit “equatorial”态的远程制备。一个n-qubit “equatorial”态表示为,

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}(|00\dots 00\rangle + e^{i\varphi_1}|00\dots 01\rangle + \dots + e^{i\varphi_{d-1}}|11\dots 11\rangle), \quad (5.2.18)$$

这里,  $d = 2^n$ 。为方便起见, 将(5.2.18)式改写成下面的形式:

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{i\varphi_j} |j\rangle, \quad (5.2.19)$$

式中 $\varphi_0 = 0$ ,  $j$ 是一个十进制数,  $\{|j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$ 是用十进制表示的 $d$ -维Hilbert空间的正交完备基矢。通信双方共享 $n$ 个EPR对,

$$|\phi^+\rangle_{A_l B_l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (5.2.20)$$

整个量子通道全部粒子态可表示为下面的形式:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\phi^+\rangle^{\otimes n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} [ (|0\rangle^{\otimes n})_A (|0\rangle^{\otimes n})_B + (|0\rangle^{\otimes n-1}|1\rangle)_A (|0\rangle^{\otimes n-1}|1\rangle)_B \\ &\quad + \dots + (|1\rangle^{\otimes n-1}|0\rangle)_A (|1\rangle^{\otimes n-1}|0\rangle)_B + (|1\rangle^{\otimes n})_A (|1\rangle^{\otimes n})_B ], \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

其中 $(\ )_A$ 、 $(\ )_B$ 分别表示Alice和Bob处的粒子, 用十进制表示的基矢改写(5.2.21)式,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} [ |0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B + \dots + |d-1\rangle_A (|d-1\rangle_B) ] = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle_A |j\rangle_B. \quad (5.2.22)$$

Alice据要发送量子态 $|\phi_0\rangle$ 具体信息, 对她手中每一个粒子实施 $U$ 操作,

$$U|j\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \Gamma^{jk} e^{i\varphi_k} |k\rangle_A, \quad (5.2.23)$$

式中 $\Gamma = e^{i2\pi/d}$ . U操作后, (5.2.21)式演化为:

$$U|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle_A |\phi_k\rangle_B, \quad (5.2.24)$$

其中,

$$|\phi_k\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m=0}^{d-1} (\Gamma^{mk} e^{i\varphi_m} |m\rangle_B). \quad (5.2.25)$$

然后, Alice在基矢 $\{|k\rangle\}_{k=0}^{d-1}$ 下, 对她的粒子序列进行测量, 测量结果为 $|k\rangle_A$ , 并发送 $\log_2 d = n \text{ cbits}$ 的经典信息给Bob, 告诉Bob她的测量结果, 这样, Bob便知道了他的粒子的量子态已坍缩为 $|\phi_k\rangle_B$ .

Bob为将目标态制备在他的子系统上, 需要实施下面的么正变换,

$$V^k = \text{diag}(1, \Gamma^{-k}, \Gamma^{-2k}, \dots, \Gamma^{-(d-1)k}), \quad (5.2.26)$$

这将导致下面的演化,

$$\begin{aligned} V^k |\phi_k\rangle_B &= |\phi_0\rangle_B \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} (|00 \dots 00\rangle + e^{i\varphi_1} |00 \dots 01\rangle + \dots + e^{i\varphi_{d-2}} |11 \dots 10\rangle + e^{i\varphi_{d-1}} |11 \dots 11\rangle). \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

这样, 便完成了n-qubit “equatorial”态的远程态制备, 所消耗的资源及所传递的量子信息可以表示为,

$$n \text{ cbits} + n \text{ ebits} \longrightarrow n \text{ qubits} \quad (5.2.28)$$

上面所讨论的方案可推广至一个d-维量子系统“equatorial”态的远程态制备, 相应的所需经典信息及量子纠缠与所传递的量子信息关系如下:

$$\log_2 d \text{ cbits} + \log_2 d \text{ ebits} \longrightarrow \log_2 d \text{ qubits} \quad (5.2.29)$$

具体过程这里不再赘述。

#### 5.2.4 n-qubit “equatorial”态受控RSP方案

下面我们分析一个受控RSP过程, 以n-qubit “equatorial”态的受控RSP为例, 即上面所讨论的远程态过程受到一个监控者Charlie控制。我们将要发送量子态 $|\phi_0\rangle$ 直接表示成(5.2.19)式的十进制形式。

量子通道由 $(n-1)$ EPR对和一个GHZ态构成,

$$|\phi^+\rangle_{A_l B_l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), (l = 1, 2, \dots, n-1), \quad (5.2.30)$$

和一个GHZ态构成,

$$|GHZ\rangle_{A_n B_n C} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \quad (5.2.31)$$

Alice、Bob和Charlie分别拥有粒子 $A_l$ 、 $B_l$ 和 $C$ 。量子通道中所有粒子的量子态为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\phi^+\rangle^{\otimes n-1} \otimes |GHZ\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} [ (|0\rangle^{\otimes n})_A (|0\rangle^{\otimes n})_B |0\rangle_C + (|0\rangle^{\otimes n-1}|1\rangle)_A (|0\rangle^{\otimes n-1}|1\rangle)_B |1\rangle_C \\ &\quad + \dots + (|1\rangle^{\otimes n-1}|0\rangle)_A (|1\rangle^{\otimes n-1}|0\rangle)_B |0\rangle_C + (|1\rangle^{\otimes n})_A (|1\rangle^{\otimes n})_B |1\rangle_C ], \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

我们将上式中二进制表示的基矢换成相应的十进制基矢, 有

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{d}} [ |0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C + |1\rangle_A |1\rangle_B |1\rangle_C + \dots + |d-2\rangle_A |d-2\rangle_B |0\rangle_C \\ &\quad + |d-1\rangle_A |d-1\rangle_B |1\rangle_C ]. \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

我们注意到 $|j\rangle_A$  (或 $|j\rangle_B$ )偶数和奇数基矢分别与粒子C的 $|0\rangle_C$ 和 $|1\rangle_C$ 基矢相对应, 于是, 我们将上式改写为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m=0}^{\frac{d}{2}-1} (|2m\rangle_A |2m\rangle_B |0\rangle_C + |2m+1\rangle_A |2m+1\rangle_B |1\rangle_C). \quad (5.2.34)$$

Alice对她的子系统实施下面的U操作,

$$U|j\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \Gamma^{jk} e^{i\varphi_k} |k\rangle_A, \quad (5.2.35)$$

这里 $\Gamma = e^{i2\pi/d}$ . 之后, 量子通道中量子态变为:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle_A |\psi_k\rangle_{BC}, \quad (5.2.36)$$

其中

$$|\psi_k\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m=0}^{\frac{d}{2}-1} (\Gamma^{(2m)k} e^{i\varphi_{2m}} |2m\rangle_B |0\rangle_C + \Gamma^{(2m+1)k} e^{i\varphi_{2m+1}} |2m+1\rangle_B |1\rangle_C). \quad (5.2.37)$$

为使Alice的子系统从(5.2.36)式的纠缠态中分离出来,她需要实施一个投影测量,并发送 $\log_2 d = n$  cbits经典信息通知Bob她的测量结果为 $|k\rangle$ 。之后, Bob对他的子系统实施相应的 $V^k$ 变换,使Bob与Charlie的子系统的坍缩态 $|\psi_k\rangle_{BC}$ 演化为 $|\psi_0\rangle_{BC}$ ,即

$$V^k = \text{diag}(1, \Gamma^{-k}, \Gamma^{-2k}, \dots, \Gamma^{-(d-1)k}), \quad (5.2.38)$$

$$V^k |\psi_k\rangle_{BC} = |\psi_0\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m=0}^{\frac{d}{2}-1} (e^{i\varphi_{2m}} |2m\rangle_B |0\rangle_C + e^{i\varphi_{2m+1}} |2m+1\rangle_B |1\rangle_C). \quad (5.2.39)$$

由(5.2.39)式,我们可以看到, Alice发送的量子信息由Bob和Charlie共享, Bob不可能通过局域操作获全部信息,必须得到Charlie的认可与配合才能完成。Charlie需对粒子实施一个Hadamard操作和Von-Neumann 测量,才能使粒子C从纠缠态(5.2.39)式中分离出来,

$$H |\psi_0\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_C |\phi_0\rangle_B + |1\rangle_C |\phi_1\rangle_B), \quad (5.2.40)$$

其中 $|\phi_0\rangle_B$ 是Alice要制备的目标态,而

$$|\phi_1\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m=0}^{\frac{d}{2}-1} (e^{i\varphi_{2m}} |2m\rangle - e^{i\varphi_{2m+1}} |2m+1\rangle). \quad (5.2.41)$$

用二进制基矢表示 $|\phi_1\rangle_B$ ,

$$|\phi_1\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{d}} (|00\dots 00\rangle - e^{i\varphi_1} |00\dots 01\rangle + \dots + e^{i\varphi_{d-2}} |11\dots 10\rangle - e^{i\varphi_{d-1}} |11\dots 11\rangle). \quad (5.2.42)$$

Charlie 需将他的测量结果通过发送1 cbit经典信息给Bob,对应于Charlie的测量结果 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ , Bob对粒子 $B_n$ 实施恒等操作I或 $\sigma_z$  操作,这样便成功地将目标态 $|\phi_0\rangle$ 制备在Bob的子系统 $\{B_l\}, l = 1, 2, \dots, n$ 上,完成了受控RSP过程。消耗的资源与传输的量子信息关系是:

$$(n+1) \text{ cbits} + n \text{ ebits} \longrightarrow n \text{ qubits}. \quad (5.2.43)$$

### 5.2.5 小结

本节我们提出如何用实验上容易实现的EPR对作为量子通道来实现量子系统“equatorial”态的远程态制备,所传输的经典信息量及消耗的量子资源与pati<sup>[3]</sup>

和Agrawal<sup>[157]</sup>方案一样。我们用一个GHZ态来代替一个EPR对,进一步给出受控RSP方案,本节只讨论了有一个监控者情形。需要说明的是:(1)如果通讯网络上有 $m$ 个监控者,只需将(5.2.31)式改为: $|GHZ\rangle_{A_n B_n C_1 \dots C_m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\dots 0\rangle + |11\dots 1\rangle)$ ,每一个监控者拥有一个 $C$ 粒子。每一个监控者的控制过程与上面讨论相同,控制过程共需传输 $m$  cbits的经典信息,不增加量子资源(纠缠)的消耗。(2)只要在量子通道构建起来之后,监控者控制操作可以随时进行,不需要在Alice的操作之后,更不需要知道Alice的测量结果。

### 5.3 利用QED腔实现单个qubit任意态RSP方案

如果要在远程态制备过程中传输最少的经典信息,以上我们所讨论的RSP方案仅适用于某些特殊量子态的远程态制备,下面我们利用腔QED理论实现单个qubit任意态的远程态制备。单个qubit任意态为

$$|\phi_0\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle, \quad (5.3.1)$$

实参数 $\theta$ 和 $\varphi$ 对信息的发送者Alice是已知的,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 。Alice想让这个量子态在Bob处再现,但为安全起见,又不能直接将量子态发送给Bob,这是一个RSP过程。

假设我们的两态系统(qubit)是一个二能级原子,我们希望在完成RSP过程中,与前面的方案一样,仅需1 cbit的经典信息,下面分两种情况来讨论。

#### 5.3.1 第一种情形

假设通信双方事先共享一个GHZ态做为量子通道,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)_{123}, \quad (5.3.2)$$

原子(1,2)属于Alice, Bob拥有原子3。

Alice首先对原子1实施 $|1\rangle \rightarrow ie^{i\varphi}|1\rangle$ 变换,这样量子通道的3个原子的纠缠态变为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + ie^{i\varphi}|111\rangle)_{123} \quad (5.3.3)$$

然后, Alice将原子(1,2)同时注入受经典驱动大失谐腔场中,如取相互作用时间满足 $\lambda t = \theta/2, \Omega t = \pi$ ,由(3.3.31)式可知,两原子将按下面的规律演化:

$$|00\rangle_{12} \rightarrow (\cos(\theta/2)|00\rangle - i \sin(\theta/2)|11\rangle)_{12}, \quad (5.3.4a)$$

$$|11\rangle_{12} \rightarrow (\cos(\theta/2)|11\rangle - i \sin(\theta/2)|00\rangle)_{12}. \quad (5.3.4b)$$

经腔场的演化后, (5.3.3)式变成下面的形式:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos(\theta/2)|00\rangle_{12} - i \sin(\theta/2)|11\rangle_{12})|0\rangle_3 \\
 &\quad + ie^{i\varphi}(\cos(\theta/2)|11\rangle_{12} - i \sin(\theta/2)|00\rangle_{12})|1\rangle_3] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle_{12}(\cos(\theta/2)|0\rangle_3 + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle_3) \\
 &\quad - i|11\rangle_{12}(\sin(\theta/2)|0\rangle_3 - e^{i\varphi} \cos(\theta/2)|1\rangle_3)]. \tag{5.3.5}
 \end{aligned}$$

现在, Alice 对粒子(1,2)实施投影测量, 因为只有两种可能的结果 $|00\rangle$ 或 $|11\rangle$ , 所以, 只需1 *cbit*的经典信息, Bob就可以知道Alice的测量结果。如果结果是前者, 原子3的塌缩态为 $|\phi_0\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle_3 + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle_3$ , 这正是Alice要发送给他的量子态; 如果测量结果是后者, 原子3的量子态为,

$$|\phi_0'\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle_3 - e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle_3. \tag{5.3.6}$$

Bob 只要对原子3实施 $\sigma_z$ 操作, 就可以得目标态 $|\phi_0\rangle$ 。

### 5.3.2 第二种情形

假设Alice与Bob间量子通道是根据要发送量子态的具体形式而构建的, 而不是一个简单的最大纠缠态。

起初, Alice拥有初态为 $|00\rangle_{12}$ 的两原子(1,2), 将这两原子同时注入受经典场驱动的大失谐腔场中, 取相互作用时间满足 $\Omega t = \pi$  和 $\lambda t = \theta/2$ , 由(3.3.31)式可知, 原子将经历下面的演化:

$$|00\rangle_{12} \longrightarrow |\psi'\rangle = \cos(\theta/2)|00\rangle_{12} - i \sin(\theta/2)|11\rangle_{12}. \tag{5.3.7}$$

然后, Alice 对原子1实施 $|1\rangle \rightarrow ie^{i\varphi}$  变换, 则

$$|\psi'\rangle \longrightarrow |\psi\rangle = \cos(\theta/2)|00\rangle_{12} + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|11\rangle_{12}. \tag{5.3.8}$$

我们看到, 纠缠态(5.3.8)式中的系数与被发送量子态 $\phi_0$ 的系数是一样的。Alice持有原子1, 将原子2发送给Bob, 这样, 通信双方就构建一个与 $|\phi_0\rangle$ 有关的量子通道。当确信量子通道是安全的之后, Alice 对原子1实施一个Hadamard 变换, 则

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|\phi_0\rangle + |1\rangle_1|\phi_1\rangle). \tag{5.3.9}$$

式中,

$$|\phi_0\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle_2 + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle_2, \quad (5.3.10a)$$

$$|\phi_1\rangle = \sin(\theta/2)|0\rangle_2 - e^{i\varphi} \cos(\theta/2)|1\rangle_2. \quad (5.3.10b)$$

Alice 对粒子1实施投影测量, 并发送1 *cbit*经典信息告诉Bob他的测量结果, 针对Alice的测量结果 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ , Bob只要对原子2实施恒等操作 $I$ 或 $\sigma_z$ 操作, 即可将目标态成功地制备在原子2上。

### 5.3.3 小结

本节我们借助于腔QED理论, 阐述了如何实现单个qubit任意态的远程态制备。我们给出了两种实现方案, 两种方案的共同点是: 都需借助于腔QED技术; 信息传输过程只传递1 *cbit*的经典信息; 都可以实现单个qubit任意态的远程态制备。不同点是: 量子通道中粒子纠缠形式不同; 消耗的量子资源不同(纠缠)不同, 第一种方案需要1 *ebit*的纠缠, 而第二种方案只消耗了 $(-\cos^2(\theta/2) \log_2 \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \log_2 \sin^2(\theta/2))$  *ebits*的纠缠。本节所讨论的RSP方案, 可以用于多个二能级原子任意态的远程态制备。

## 6 总结与展望

本论文是作者在攻读博士学位期间主要研究工作的一个总结，文中详细介绍了我们在纠缠制备及量子信息远程传输方面的理论研究工作。

考虑到W态的抗退相干性，我们想利用W态作为子通道来实现量子通讯过程。在第3章，我们利用大失谐的腔QED理论，通过控制二能级原子进入单模腔场顺序及原子在腔场中的运行速度来制备n-体对称W态和两种特殊的n-体非对称类-W态。这两种类-W态的共同点是：量子系统中的第1个粒子与它的对偶子系之间纠缠度为1；而第1个粒子以外粒子与其对偶子系间纠缠度小于1。作为应用，我们在第4章详细介绍了如何利用这种非称的类-W态实现确定的单向受控量子隐形传态。证明了用传统的量子隐形传态方案，无论是对称W态，还是非对称的类-W态都只能实现概率传态，但如果借助于腔QED理论，利用特殊的非对称类-W态可以实现确定的量子隐形传态；若将纠缠态中粒子分发给通信双方以外的个体，则可实现受控量子隐形传态。利用这种非对称类-W态作为量子通道能实现信息的单向通讯，即在没有噪声的条件下，Alice可以将量子信息准确无误地发送给任一个客户，但每一个客户只能互相控制配合整个信息的传输过程，客户之间不能实现确定的信息传递过程，这样便保证了信息的安全性。

量子纠缠是量子通讯过程中不可或缺的重要物理资源，为节省资源的消耗，在第4章我们提出，仅用一个EPR对实现n-体类-GHZ态的量子隐形传态方案。我们通过Hadamard门操作、引入辅助粒子及模2加计算，在整个通讯过程只需要一个EPR对，只传输3 *cbits*的经典信息，大大节省了物理资源，缓解信道压力（包括经典信道和量子信道）。如果用GHZ态代替EPR对作为量子通道，则可实现受控量子隐形传态，每增加一个监控者，在经典信道中多1 *cbits*的经典信息。

在第4章我们还提出了利用腔QED技术实现多原子任意态隐形传态方案。在该方案中，用对单原子的投影测量来代替在实验上难以实现的直接Bell态测量，并且，引入十进制数来表示多量子比特的量子态，给出了信息发送者的测量结果与接收者的么正变换之间的对应关系，简化了复杂的多体问题的数学表达式。此外，在第4章我们还总结了能完成确定量子隐形传态的纠缠态特点及利用超算符方法处理确定量子隐形传态的理论方案。

在量子态远程态制备（RSP）方面，我们提出两种RSP方案。第一种方案是用n个EPR对作为量子通道来完成n-量子比特“equatorial”态的远程制备，在这一过程中只需传输n-比特的经典信息，并首次提出如何实现受控RSP过程。第二种RSP方案是借助于腔QED理论实现单个qubit任意态的远程态制备。该方案又表现为两种不同方式，这两方式的不同点表现为：量子通道中粒子纠缠形式不同，即RSP过程所消耗的量

子资源不同(纠缠)不同。这种RSP方案可以用于多个二能级原子任意态的远程态制备。

诚然,本研究工作仅仅是量子通讯领域理论方面的探索,我们虽然充分考虑了具体的实验条件,尽量让每一种通讯方案与目前的技术相结合,但摆在我们面前的许多问题还有待于进一步研究和探讨。例如,本文所提出多体纠缠态制备方案及在腔中实现多体量子态变换的方案,在应用过程中,如何选择适合的量子比特、如何克服量子耗散及量子消相干现象等问题,都值得我们进一步思考。

量子信息远程传输是量子信息学重要组成部分,是实现量子通讯及量子计算的必要步骤。随着科学技术的迅速发展,量子隐形传态及量子远程态制备的研究将不断深入。另外,人们对量子密码术、量子纠缠及量子计算等量子信息学其它分支的研究也是方兴未艾,尽管我们还面临许多不解之谜,但“昨天的梦想,是今天的希望,也可能是明天的现实”!我们有理由相信量子信息时代一定会到来。

## 参 考 文 献

- [1] Shannon C E. A Mathematical Theory of Communication. Bell Syst. Tech. Journal, 1948, 27(7): 379-423, 27(10):623-656.
- [2] <http://www.physics.udel.edu/~watson/scen103/intel.html>.
- [3] Pati A K. Minimum cbits for remote preparation and measurement of a qubit. Phys. Rev. A., 2001, 63: 014302(1-3).
- [4] 宋鹤山,宋天译. 量子信息论. 大连: 大连理工大学出版社,2007.
- [5] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A et al. Quantifying entanglement. Phys.Rev.Lett.,1997, 78(12): 2275-2279.
- [6] Jozsa R A and Schumacher B. A new proof of the quantum noiseless coding theorem. J. Mod. Opt.,1994, 41:2343-2349.
- [7] White A G, James D F V, Eberhard P H et al. Nonmaximally Entangled States: Production, Characterization, and Utilization. Phys. Rev. Lett., 1999, 83: 3103-3107.
- [8] Sackett C A, Kielpinski D, King B E et al. Experimental entanglement of four particles. Nature, 2000, 404: 256-259.
- [9] 李承祖,黄明球, 陈平等. 量子通信与量子计算.长沙: 国防科技大学出版社, 2000.
- [10] Schumacher B. Quantum coding. Phys. Rev. A, 1995, 51(4): 2738-2746.
- [11] Nielsen M A and Chuang I L. Quantum computation and quantum information. 北京: 高等教育出版社,2003.
- [12] Bennett C H, Bernstein H J, Popescu S et al. Concentrating partial entanglement by local operations. Phys. Rev. A, 1996, 53(4): 2046-2052.
- [13] Lo H K, Popescu S. Classical communication cost of entanglement manipulation: Is entanglement an interconvertible resource? Phys. Rev. Lett.,1999, 83: 1459-1462.
- [14] Lo H K, Popescu S. Concentrating entanglement by local actions -beyond mean values. Phys. Rev. A, 2001,63(2): 022301(1- 16).
- [15] Wootters W K and Zurek W H. A single quantum cannot be cloned. Nature, 1982, 299: 802-803
- [16] Dieks D. Communication by EPR devices. Phys. Lett. A.,1982, 92: 271-272.
- [17] Shor P W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. SIAM J. Comput., 1997, 26(5): 1484-1509.
- [18] Bennett C H and Brassard G. Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing. Proc. IEEE Int. Conf. On Computers, Systems and signal processing, Bangalore, India(IEEE,New York), 1984, 175-179.
- [19] Bennett C H. Quantum cryptography using any two nonorthogonal states. Phys.Rev.Lett.,1992, 68(21):3121-3124.
- [20] Bruss D. Optimal eavesdropping in quantum cryptography with six states. Phys.Rev.Lett., 1998, 81(14): 3018-3021.
- [21] Mayers D. Shor and Preskill's and Mayers's security proof for the BB84 quantum key distribution protocol. Eur. Ph ys. J. D., 2002, 18(2): 161-165.

- [22] Shor P W and Preskill J. Simple proof of security of the BB84 quantum key distribution protocol. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85(2): 441-444.
- [23] Ekert A k, Rarity J G and Tapster P R et al. Practical quantum cryptography based on two-photon interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, 69(9):1293-1295.
- [24] Grosshans F and Grangier P. Continuous variable quantum cryptography using coherent states. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88(5):057902(1-4).
- [25] Hillery M. Quantum cryptography with squeezed states. *Phys Rev A*, 2000, 61:022309(1-8).
- [26] Hwang W Y, Koh I G and Han Y D. Quantum cryptography without public announcement of bases. *Phys. Lett. A*, 1998, 244: 489-494.
- [27] Bechmann-Pasquinucci H and Peres A. Quantum cryptography with 3-state systems. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85: 3313-3316.
- [28] Hiskett P A, Rosenberg D, Peterson C G et al. Long-distance quantum key distribution in optical fibre. *New Journal of Physics*, 2006, 8:193-196.
- [29] Bennett C H and Wiesner S J. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, 69: 2881-2884.
- [30] Beige A, Englert B G, Kurtsiefer C et al. Secure communication with single-photon two-qubit states. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2002, 35: L407-L413.
- [31] Yan F L and Zhang X Q. A scheme for secure direct communication using EPR pairs and teleportation. *Eur. Phys. J. B*, 2004, 41: 75-78.
- [32] Boström K and Felbinger T. Deterministic Secure Direct Communication Using Entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 89: 187902(1-4).
- [33] Deng F G, Long G L and Liu X S. Two-step quantum direct communication protocol using the Einstein-Podolsky-Rosen pair block. *Phys. Rev. A*, 2003, 68: 042317(1-6).
- [34] Deng F G and Long G L. Secure direct communication with a quantum one-time pad. *Phys. Rev. A*, 2004, 69: 052319(1-4).
- [35] Cai Q Y and Li B W. Deterministic secure communication without using entanglement. *Chin. Phys. Lett.*, 2004(4), 21: 601-603.
- [36] Wang C, Deng F G, Li Y S et al. Quantum secure direct communication with high-dimension quantum superdense coding. *Phys. Rev. A*, 2005, 71, 044305(1-4).
- [37] Sleator T and Weinfurter H. Realizable Universal Quantum Logic Gates. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 74:4087-4090.
- [38] Turchette Q A, Hood C J, Lange W, et al. Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 75:4710-4713.
- [39] Cirac J I and Zoller P. Quantum Computations with Cold Trapped Ions. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 74:4091-4094.
- [40] Sleane A. The ion trap quantum information processor, *Appl. Phys.*, 1997, B64:623-643.
- [41] Chuang I L, Vandersypen L M K, Zhou X, et al. Experimental realization of a quantum algorithm, *Nature*, 1998, 393: 143-146.

- [42] D.Bouwmeester,J.W.Pan,M.Daniell,H.Weinfurter and A.Zeilinger.Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement.Phys.Rev.Lett.,1999, 82(7):1345-1349.
- [43] Pan J W, Bouwmeester D, Weinfurter H et al. Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted. Phys Rev Lett, 1998, 80: 3891-3894.
- [44] Pan J W,Bouwmeester D,M.Daniell,H.Weinfurter and A.Zeilin. Experimental test of quantum non-locality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement.Nature,2000,403:515-519.
- [45] Pan J W,M.Daniell,S.Gasparoni,G.Weihns and A.Zeilinger.Experimental demonstration of four-photon entanglement and high-fidelity teleportation.Phys.Rev. Lett.,2001,86(20):4435-4438.
- [46] A.Vaziri,G.Weihns and A.Zeilinger.Experimental two-photon,three-dimensional entanglement for quantum communication.Phys.Rev.Lett.,2002,89(24):240401(1-4).
- [47] Z.Zhao,T.Yang,Y.A.Chen,A.N.Zhang,M.Znkowski. Experimental violation of local realism by four-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement.Phys.Rev.Lett.,2003,91(18):180401(1-4).
- [48] M.Eibl,N.Kiesel,M.Bourennanl,C.Kuetsiefer and H.weinfurter.Experimental realization of a three-qubit entangled W state.Phys.Rev.Lett.,2004,92(7): 077901(1-4).
- [49] Zhi Z, Yu A C, Zhang A N et al. Experimental demonstration of five-photon entanglement and open-destination teleportation. Nature, 2004, 430: 54-58.
- [50] Sleane A. The ion trap quantum information processor. Appl.Phys.B, 1997, 64:623-627.
- [51] B.E.King,C.S.Wood,C.J.Myatt et al.Cooling the collective motion of trapped ions to initialize a quantum register.Phys.Rev.Lett.,1998,81(7):1525-1528.
- [52] S.B.Zheng.Fast scheme for the generation of entangled states of multiple hot trapped ions.Phys.Rev.A,2002,65(5):051804(1-4).
- [53] S.B.Zheng.Generation of entangled states of multiple trapped ions in thermal motion. Phys.Rev.A,2004,70(4):045804(1-3).
- [54] G.X.Li,H.T.Tan and S.P.Wu.Motional entanglement for two trapped ions in cascaded optical cavities.Phys.Rev.A,2004,70(6):064301(1-4).
- [55] A.P.Hines,R.H.Mckenzie and G.J.Milburn.Entanglement of two-mode Bose-Einstein condensates.Phys.Rev.A,2003,67(1):013609(1-10).
- [56] C.C.Gerry and R.A.Campos.Generation of maximally entangled states of a Bose-Einstein condensate and Heisenberg-limited phase resolution.Phys.Rev.A,2003, 68(2):025602(1-4).
- [57] M.Zhang,K.Helmerson and L.You.Entanglement and spin squeezing of Bose-Einstein condensed atoms.Phys.Rev.A,2003,68(4):043622(1-11).
- [58] L.You.Creating Maximally Entangled Atomic States in a Bose-Einstein Condensate. Phys.Rev.Lett.,2003,90(3):030402(1-3).
- [59] Loss D et al. Quqntm computation with quantum dots. Phys.Rev.A,1998,57:120-126.
- [60] X.G.Wang,M.Feng and B.C.Sanders.Multipartite entangled states in cou quantum dots and cavity QED.Phys.Rev.A,2003,70(3):034307(1-4).
- [61] G.X.Li,Y.P.Yang,K.Allaart et al.Entanglement for excitons in two quantum do a cavity injected with squeezed vacuum.Phys.Rev.A,2004,69(4):014301(1-4).

- [62] Brune M, et al. From Lamb Shift to light shifts: vacuum and subphoton cavity field measured by atomic phase sensitive detection. *Phys.Rev.Lett.*,72:3339-3342.
- [63] S.B.Zheng and G.C.Guo.Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in Cavity QED.*Phys.Rev.Lett.*,2000,85(11):2392-2395.
- [64] S.B.Zheng.One-step synthesis of multiatom Greenberger-Horne-Zeilinger states. *Phys.Rev.Lett.*,2001,87:230404(1-4).
- [65] L.M.Duan.Entangling many a tomic ensembles through laser manipulation.*Phys.Rev. Lett.*,2002,88(17):170402(1-4).
- [66] L.M.Duan and H.J.Komble.Efficient engineering of multiatom entanglement through single-photon detections.*Phys.Rev.Lett.*,2003,90(25):253601(1-4).
- [67] D.E.Browne and M.B.Plenio.Robust generation of entanglement between two cavities mediated by short interactions with an atom. *Phys.Rev.A*,2003,67(1): 012325(1-7).
- [68] X.B.Zou,K.Pahlke and W.Mathis.Quantum entanglement of four distant atoms trapped in different optical cavities.*Phys.Rev.A*,2004,69(5):052314(1-7).
- [69] X.B.Zou and W.Mathis.One-step implementation of maximally entangled states of many three-level atoms in microwave cavity QED.*Phys.Rev.A*,2004,70(3): 035802(1-5).
- [70] Zheng S B. Splitting quantum information via W states. *Phys.Rev.A*,2006,74(3): 054303(1-4).
- [71] E.T.Jaynes and F.W.Cummings,Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser.*Proc.IEEE*, 1963,51:89.
- [72] J I Cirac and P Zoller. Preparation of macroscopic superpositions in many-atom systems. *Phys.Rev.A*,1994,50: 2799-2802.
- [73] Hagley E, Maitre X, Nogues G, et al. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen Pairs of Atoms. *Phys.Rev.Lett.*,1997,79:1-5.
- [74] Vogel K, Akulin V M and Schleich W P. Quantum state engineering of the radiation field. *Phys.Rev.Lett.*, 1993,71:1816-1819.
- [75] Pakrinstal A S, Marte P and Zoller P. Synthesis of arbitrary quantum states via adiabatic transfer of Zeeman coherence. *Phys.Rev.Lett.*, 1993,71:3095-3098.
- [76] Wang C C, Song W, Yu B L, et al. General scheme for preparation of three atom W state via cavity QED. *J. Atom. and Mol.Phys*, 2005,22(1):47-52.
- [77] Brune M, S Haroche, J M Raimond, et al. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of ‘‘Schrödinger cat’’ states . *Phys.Rev.A*,1992,45: 5193-5214.
- [78] Brune M, E. Hagley, J. Dreyer, et al. Observing the Progressive Decoherence of the ‘‘Meter’’ in a Quantum Measurement. *Phys.Rev. Lett.*,1996,77:4887-4890.
- [79] Zheng S B and Guo G. Teleportation of atomic states within cavities in thermal states. *Phys.Rev.A*, 2001, 63: 044302(1-4).
- [80] Zheng S B. Quantum-information processing and multiatom-entanglement engineering with a thermal cavity. *Phys.Rev.A*, 2002, 66: 060303(R)(1-4).

- [81] Zheng S B. Generation of entangled states for many multilevel atoms in a thermal cavity and ions in thermal motion. *Phys.Rev.A*, 2003, 68: 035801(1-4).
- [82] Dür W, Vidal G, Cirac J I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Phys Rev A*, 2000, 62: 062314(1-12).
- [83] Greenberger D M, Horne M A, Shimony A, Zeilinger A. Bell' s theorem without inequalities. *Am J Phys*, 1990, 58(12):1131-1143.
- [84] Shi S B, Tomita A. Teleportation of an unknown state by W state. *Phys Lett A*, 2002, 296(4):161-164.
- [85] Cao Z L, Yang M. Probability teleportation of unknown atomic state using W class states. *Phys A*, 2004, 337(1):132-140.
- [86] Guo P G, Li C F, Li J, et al. Scheme for the preparation of the multi-particle entanglement in cavity QED. *Phys. Rev. A*, 2002, 65:042102(1-4).
- [87] Wang Y H and Song H S. Preparation of partially entangled W state and deterministic multi-controlled teleportation. *Opt. Commun.*, 2008, 281(3):489-493.
- [88] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, Jozsa R, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 70: 1895-1899.
- [89] Zhou L and Kuang L M. Linear Optical Implementation for Quantum Teleportation of Unknown Two-Qubit Entangled States. *Chin. Phys.Lett.*, 2004, 21:2101-2104 .
- [90] Lee J, Min H, and Oh S D. Multipartite entanglement for entanglement teleportation. *Phys.Rev.A*, 2002, 66:052318(1-5).
- [91] Rigolin G. Quantum teleportation of an arbitrary two-qubit state and its relation to multipartite entanglement. *Phys. Rev. A*, 2005, 71: 032303(1-5).
- [92] Deng F G. Comment on "Quantum teleportation of an arbitrary two-qubit state and its relation to multipartite entanglement" . *Phys. Rev. A*, 2005, 72: 036301(1-2).
- [93] Lee H W. Total teleportation of an entangled state. *Phys. Rev. A*, 2001, 64: 014302(1-4).
- [94] Dai H Y, Chen P X and Li C Z. Teleportation of an Arbitrary Two-Particle State by Two Partial Entangled Three-Particle GHZ States. *Commun. Theor. Phys.*, 2005, 43(5): 799-802.
- [95] Yang C P and Guo G C. Multiparticle Generalization of Teleportation. *Chin. Phys. Lett.*, 2000, 17(3): 162-164.
- [96] Chen L. Teleportation of an arbitrary three-particle state. *Chin. Phys.*, 2002, 11:999-1003.
- [97] Cao M, Zhu S Q and Fang J X. Teleportation of n-Particle State via n Pairs of EPR Channels. *Commun. Theor. Phys.*, 2004, 41(5): 689-692.
- [98] Ikram M, Zhu S Y, Zubairy M S. Quantum teleportation of an entangled state. *Phys. Rev. A*, 2000, 62: 022307(1-9).
- [99] Fang J X, Zhu S Q and Chen X F. Teleportation of a Three-Particle State via Entanglement Swapping. *Commun. Theor. Phys.* 2003, 39(5): 529-530.
- [100] Vaidman L. Teleportation of quantum states. *Phys. Rev. A*, 1994, 49: 1473-1476.
- [101] Li F L, Li H R, Zhang J X, et al. Teleported state and its fidelity in quantum teleportation of continuous variables. *Chin. Phys. Lett.*, 2003, 20: 14-17.

- [102] Pirandola S, Mancini S, Vitali D, et al. Continuous-variable entanglement and quantum-state teleportation between optical and macroscopic vibrational modes through radiation pressure. *Phys.Rev.A*, 2003, 68: 062317(1-14).
- [103] Dolinska A, Buchler B C, Bowen W P, et al. Teleportation of continuous-variable polarization states. *Phys.Rev.A*, 2003, 68: 052308(1-8).
- [104] Fujii M. Continuous-variable quantum teleportation with a conventional laser. *Phys.Rev.A*, 2003, 68: 050302(1-4).
- [105] Caves C M and Wódkiewicz K. Classical phase-space descriptions of continuous-variable teleportation. *Phys.Rev.Lett.*, 2004, 93: 040506(1-4).
- [106] Li W L, Li C F and Guo G C. Probabilistic teleportation and entanglement matching. *Phys.Rev.A*, 2000, 61:034301(1-3).
- [107] Lu H, and Guo G C. Teleportation of a two-particle entangled state via entanglement swapping. *Phys.Lett.A*, 2000, 276(5-6):209-212.
- [108] Shi B S, Jiang Y K and Guo G C. Probabilistic teleportation of two-particle entangled state. *Phys. Lett. A*, 2000, 268: 161-164.
- [109] Gu Y J, Zheng Y Z and Guo G C. Probabilistic teleportation of an Arbitrary Two-particle State. *Chin. Phys.Lett.*, 2001, 18:1543-1545.
- [110] Gao T, Wang Z X and Yan F L. Quantum Logic Network for Probabilistic Teleportation of Two-Particle State in a General Form. *Chin. Phys. Lett.*, 2003, 20(12): 2094-2097.
- [111] Cao M and Zhu S Q. Probabilistic Teleportation of n-Particle State via n Pairs of Entangled Particles. *Commun. Theor. Phys.*, 2005, 43: 69-72.
- [112] Xi Y J, Fang J X, Zhu S Q, et al. Probabilistic Teleportation of an Arbitrary n-Particle Entangled State. *Commun. Theor. Phys.*, 2005, 44(1): 51-54.
- [113] Agrawal P and Pati A K. Probabilistic quantum teleportation. *Phys. Lett.A*, 2002, 305(1-2): 12-17.
- [114] Hsu L Y. Optimal information extraction in probabilistic teleportation. *Phys.Rev.A*, 2002, 66:012308(1-6).
- [115] Pati A K and Agrawal P. Probabilistic Teleportation of a Qudit. *quant-ph*, 2006, 10(11):0611115.
- [116] Pati A K and Agrawal P. Probabilistic teleportation and quantum operation. *J. Opt. B: Quant. Semi. Opt.*, 2004, 6: S844-S848.
- [117] Gordon G and Rigolin G. Generalized teleportation protocol. *Phys. Rev. A*, 2006, 73: 042309(1-4).
- [118] Karlsson A and Bourennane M. Quantum teleportation using three-particle entanglement. *Phys. Rev. A*, 1998, 58: 4394-4400.
- [119] Pati A K. Assisted cloning and orthogonal complementing of an unknown state. *Phys. Rev. A*, 2000, 61: 022308(1-4).
- [120] Deng F G, Li C F, Li Y S, Zhou H Y and Wang Y. Symmetric multiparty-controlled teleportation of an arbitrary two-particle entanglement. *Phys. Rev. A*, 2005, 72: 022338(1-8).
- [121] Li X H, Zhou P, Li C Y, et al. Efficient symmetric multiparty quantum state sharing of an arbitrary m-qubit state. *J. Phys. B*, 2006, 39:1975-1983.

- [122] Wang Y H, Song H S and Yu C S, Teleportation of an Arbitrary Multipartite GHZ-Class State by One EPR Pair. *Chin. Phys.Lett.*, 2006, 23(12):3142-3144.
- [123] Shi B S and Tomita A. Teleportation of an unknown state by W state. *Phys. Lett. A*, 2002, 296(4): 161-164.
- [124] Joo J, Park Y J. Comment on "Teleportation of an unknown state by W state". [*Phys.Lett. A*, 2002, 296:161-164]. *Phys.Lett. A*, 2002, 300(3): 324-326.
- [125] Shi B S and Tomita A. Reply to "Comment on Teleportation of an unknown state by W state". [*Phys.Lett. A*, 2002, 300: 324-326.]. *Phys.Lett. A*, 2002, 300(5): 538-539.
- [126] Cao Z L and Yang M. Probabilistic teleportation of unknown atomic state using W class states. *Phys. A.*, 2004, 337(1):132-140.
- [127] Dai H Y, Chen P X and Li C Z. Probabilistic teleportation of an arbitrary two-particle state by two partial three-particle entangled W states. *J. Opt. B: Quant. Semiclass Opt.*, 2004, 6: 106-109
- [128] 杨洪钦, 谢树森, 利用三粒子W态隐形传送三粒子GHZ态. *光学学报*, 2006, 26(2):300-304
- [129] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, et al. Experimental quantum teleportation. *Nature (London)*, 1997, 390: 575-579.
- [130] Boschi D, Bnarea S, DeMartini F, et al. Experimental realization of teleportation an unknown Pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys.Rev.Lett.*, 1998, 80(6):1121-1125.
- [131] Furusawa A, Sorensen J L, Braunstein S L, et al. Unconditional quantum teleportation. *Science*, 1998, 282(5389):706-709.
- [132] Nielsen M A, Luill E and Laflamme R. Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 1998, 396(6707):52-55.
- [133] Kim H Y, Kulik S P, Shih Y H. Quantum teleportation of a polarization state with a complete Bell state measurement. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 86(7): 1370-1373.
- [134] Lombardi E, Sciarrino F, PoPescu S, et al. Teleportation of a vacuum-one-photon qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 88(7):070402(1-4).
- [135] Pan J W, Gasparoni S, Aspelmeyer M, et al. Experimental realization of freely propagating teleported qubit. *Nature*, 2003, 421(6924):721-725.
- [136] De Riedmatten H, Marcikic I, Tittel W, et al. Long distance quantum teleportation in a quantum relay configuration. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92(4):047904(1-4).
- [137] Zhao Z, Chen Y A, Zhang A N, et al, Experimental demonstration of five-photon entanglement and open-destination teleportation, *Nature*, 2004, 430:54-58.
- [138] Barrett M D. Deterministic quantum teleportation of atomic qubits. *Nature*, 2004, 429: 737-739.
- [139] Zheng S B. Scheme for approximate conditional teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement. *Phys Rev A*, 2005, 69: 064302(1-3).
- [140] Davidovich L, Zagury N, Brune M, Raimond J M and Haroche S. Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields. *Phys Rev A*, 1994, 50: R895-R898.
- [141] Liu Y and Guo G C. Scheme for teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement. *Phys Rev A*, 2004, 70: 054303(1-3).

- [142] Yang M and Cao Z L. Scheme for deterministic Bell-state-measurement-free quantum teleportation . quant-ph, 2004, 29: 0411195(1-3).
- [143] Zhen Y X, Yang M, Yi Y M and Cao Z L. Teleportation for atomic entangled state by entanglement swapping with separate measurements in cavity QED. quant-ph, 2006, 43: 0508040(1-5).
- [144] Zheng S B and Guo G C. Efficient Scheme for Two-Atom Entanglement and Quantum Information Processing in Cavity QED. Phys Rev Lett, 2000, 85: 2392-2395.
- [145] Riebe M, Häffner H, Roos C F, et al. Deterministic quantum teleportation with atoms. Nature (London), 2004, 429: 734-737.
- [146] Jin L H, Jin R X and Zhang S. Teleportation of a two-atom entangled state with a thermal cavity. Phys. Rev. A, 2005, 72:024305(1-3).
- [147] Chimczak G, Tanas R, and Miranowicz A. Teleportation with insurance of an entangled atomic state via cavity decay. Phys. Rev. A, 2005, 71:032316(1-11).
- [148] Liu Y and Guo G C. Scheme for teleportation of an unknown atomic state without the Bell-state measurement. Phys. Rev. A, 2004, 70: 054303(1-3).
- [149] Xue Z Y, Yang M, Yi Y M, et al. Teleportation for atomic entangled state by entanglement swapping with separate measurements in cavity QED. Preprint quantph/ 0508040(1-3).
- [150] Karlsson A and Bourennane M. Quantum teleportation using three-particle entanglement. Phys. Rev. A, 1998, 58:4394-4400.
- [151] Yan F L and Wang D. Probabilistic and controlled teleportation of unknown quantum states. Phys. Lett. A, 2003, 316:297-303.
- [152] Yang C P, Chu S I and Han S. Efficient many-party controlled teleportation of multiqubit quantum information via entanglement. Phys. Rev. A, 2004, 70:022329(1-8).
- [153] Zheng S B. Splitting quantum information via W states. Phys. Rev. A, 2006, 74:054303(1-4).
- [154] 张永德.量子信息物理原理. 北京:科学出版社,2005.
- [155] Bennett C H. Quantum information and computation. Physics Today, 1995, 48(10):24-30.
- [156] Lo H K. Classical-communication cost in distributed quantum-information processing: A generalization of quantum-communication complexity, Phys. Rev. A., 2000, 62: 012313(1-7).
- [157] Agrawal P, Parashar P and Pati A K. Exact remote state preparation for multiparties . Quant-ph, 2003, 4: 0304006(1-15).
- [158] Bennett C H, DiVincenzo D P and Shor P W, et al. Remote State Preparation. Phys. Rev. Lett., 2001, 87: 077902(1-4).
- [159] Devetak I and Berger T. Low-Entanglement Remote State Preparation. Phys. Rev. Lett., 2001, 87: 197901(1-4).
- [160] Zeng B and Zhang P. Remote-state preparation in higherdimension and the parallelizable manifold  $S^{n-1}$ . Phys. Rev. A, 2002 65: 022316(1-4).
- [161] Berry D W and Sanders B C. Optimal Remote State Preparation. Phys. Rev. Lett., 2003, 90: 057901(1-4).
- [162] Yu C S, Song H S and Wang Y H. Remote preparation of a qudit using maximally entangled states of qubits. Phys. Rev. A, 2006, 73: 022340(1-4).

- [163] Huang Y X, and Zhan M S. Remote preparation of multipartite pure state. *Phys. Lett. A*, 2004, 327(5-6):404-408.
- [164] Lin X, Li H C, Lin X M, et al. Remote preparation of a Greenberger - Horne - Zeilinger state via a two-particle entangled state. *Chin. Phys.*, 2007, 16(5): 1209-1214.
- [165] Bužek V, Hillery M and Werner R F. Optimal Manipulations with Qubits: Universal NOT Gate. *Phys. Rev. A*, 1999, 60: R2626- R2629.
- [166] Martini F D, Buek V, Sciarrino F, et al. Experimental realization of the quantum universal NOT gate. *Nature* 2002, 419: 815-818.
- [167] Peng X, Zhu X, Fang X et al. Experimental implementation of remote state preparation by nuclear magnetic resonance. *Phys. Lett. A*, 2003, 306(5-6):271-276.
- [168] Lo H K and Popescu S. Classical Communication Cost of Entanglement Manipulation: Is Entanglement an Interconvertible Resource?. *Phys. Rev. Lett.*, 83: 1459-1462.
- [169] Schumacher B. Quantum coding. *Phys. Rev. A*, 1995, 51: 2738-2747.
- [170] Barnum H, Fuchs C A, Jozsa R, et al, General fidelity limit for quantum channels. *Phys. Rev. A*, 1996, 54: 4707-4711.
- [171] DiVincenzo D P. The physical implementation of quantum computation. *Fortschr. Phys.*, 2000 48: 771-783.
- [172] Kok P, Nemoto K and Munro W J. Properties of multi-partite dark states. *Quant-ph*, 29: 0201138(1-5).
- [173] Beige A, Braun D, Tregenna B, et al, Collective and Independent-Particle Motion in Two-Electron Artificial Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85: 1762-1729.
- [174] Beige A, Munro W and Knight P L. Bell' s inequality test with entangled atoms, *Phys. Rev. A*, 2000, 62: 052102(1-9).
- [175] Kis Z, Vogel W, Davidovich L, et al. Dark SU(2) states of the motion of a trapped ion. *Phys. Rev. A*, 2001, 63: 053410(1-7).



## 攻读博士学位期间发表学术论文情况

- 1 **Ya-hong Wang**, Chang-shui Yu, He-shang Song. Chin. Phys. Lett., 2006, 23 (12): 3142-3144. 主办单位: Iop Publishing Ltd. SCI 检索期刊, 本文 SCI 检索号: 110XM. (本博士学位论文第4章)
- 2 **Ya-hong Wang**, He-shang Song, Chong Li. Commun. Theor. Phys., 2007, 48 (6): 1021-1024. 主办单位: International Academic Publishers Ltd. SCI 检索期刊, 本文 SCI 检索号: 245DI. (本博士学位论文第4章)
- 3 **Ya-hong Wang**, He-shang Song. Optics Communication, 2008, 281(3): 489-493. 主办单位: Elsevier Science Bv. SCI 检索期刊, 本文 SCI 检索号: 252AQ. (本博士学位论文第4章)
- 4 **Ya-hong Wang**, He-shang Song, Chang-shui Yu. Faithful controlled teleportation of an arbitrary unknown two-atom state via special W-states and QED cavity, Commun. Theor. Phys., 2008, 49(5):1199-1202. 主办单位: International Academic Publishers Ltd. SCI 检索期刊. (本博士学位论文第3章和第4章)
- 5 **Ya-hong Wang**, He-shang Song. Preparation of multi-atom specially entangled W-class state and splitting quantum information, Submitted to Chinese Science Bulletin. 主办单位: Chinese Academy of Sciences. SCI 检索期刊. (本博士学位论文第3章和第4章)
- 6 **Ya-hong Wang**, He-shang Song. Minimum Remote State Preparation of an Arbitrary Two-level One-atom State a via Cavity QED, Submitted to Optics Communication. 主办单位: Elsevier Science Bv. SCI 检索期刊. (本博士学位论文第5章)
- 7 **Ya-hong Wang**, He-shang Song. One-party controlled minimum remote state preparation of equatorial n-qubit states, Submitted to J. Phys. A: Math. Theor. 主办单位: Iop Publishing Ltd. SCI 检索期刊. (本博士学位论文第5章)
- 8 Chang-shui Yu, He-shang Song, **Ya-hong Wang**. Phys. Rev. A, 2006, 73(2):022340(1-5). 主办单位: American Physical Society. SCI 检索期刊, 本文 SCI 检索号: 017BC.
- 9 Chang-shui Yu, He-shang Song, **Ya-hong Wang**. Quantum Information and Computation, 2007, 7(7):584-593. 主办单位: Rinton Press. SCI 检索期刊, 本文 SCI 检索号: 195QC.
- 10 Chang-shui Yu, **Ya-hong Wang**, He-shang Song. Commun. Theor. Phys., 2007, 47(6):1041-1044. 主办单位: International Academic Publishers Ltd. SCI 检索期刊, 本文 SCI 检索号: 178MF.
- 11 王雅红, 梁红卫, 宋鹤山. 辽宁师范大学学报, 2007, 30(2):168-171. 主办单位: 辽宁师范大学. 中文核心期刊. (本博士学位论文第4章)

12 Ya-hong Wang , He-shang Song, Hong-wei Liang. MITA2006,pp650-652. 主办单位: Korea Multimedia Society,Korea. ISTP 检索.

## 致 谢

本论文是在我的导师宋鹤山教授的精心指导下完成的。从学习课程安排、研究方案选择、科研条件提供及论文的最后完成,无不凝结着恩师的心血。宋老师渊博的学识、敏锐的思维、严谨的治学态度及勤恳务实的工作作风永远是我学习的榜样。他的严于律己、宽以待人、乐观幽默的人格魅力让我敬仰。从宋老师身上,我领悟到了作为一名教师那种“学深为师,德高为范”的最高境界。在学习期间,每当我受到挫折,感到困惑彷徨的时候,是宋老师的耐心鼓励和悉心指导,让我一次次走出困境,进而走进量子信息这一神奇的研究领域。在即将完成博士论文之际,我满怀感激的心情谨向我的恩师宋鹤山教授致以崇高的敬意和衷心的感谢!

感谢衣学喜教授、周玲教授和韩福祥教授对我的帮助。几位年青学者扎实的理论功底,敏锐的洞察力和严谨的作风让我敬佩。在每次学术活上,老师们之间幽默风趣的激情讨论及独树一帜的见解都给了我很大的启发,使我受益匪浅。

感谢李崇副教授、于长水老师、海事大学的郭彦青老师的热情帮助,与他们之间的讨论对我都有很大的帮助,这也是我的论文能顺利完成的原因之一。

感谢理论物理教研室桂元星教授、刘宏亚教授、原子分子教研室的丛书林教授,他们作为学者的敬业精神、脚踏实地的作风、平和谦虚的为人,永远值得我学习。

王林成师弟是我同时期的博士生,在这几年的学习期间及撰写论文的过程中,他给予我很多无私的帮助,在此向王林成师弟表示感谢。还要感谢聂晶、夏岩、孙慧颖、郭金良、以及理论物理教研室的各位师弟师妹们的有益帮助,祝师弟师妹们早日学业有成!

本文也凝结了家人的心血和温暖!感谢我的父母对我始终如一的鼓励,感谢我的爱人张昱昌先生和我的儿子毛毛对我学习的理解和支持。在我困难的时候,他们给予我战胜困难的信心和力量,使我得以顺利完成学业。

最后感谢审阅论文和出席博士论文答辩委员会的诸位专家、教授在百忙中给予的悉心指导!同时也对曾给予我帮助和关心我的老师、同事、同学和朋友们表示衷心的感谢!

谨以此文献给我的老师我的家人和所有关心我的人们!

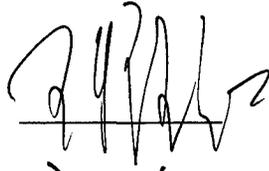
王雅红

二零零八年三月于大连

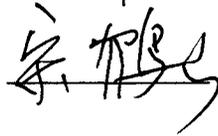
## 大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解“大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定”，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。

作者签名：



导师签名：



2008 年 6 月 20 日